[...]nsaml
~~F. M. Britton~~
Queens Coll[...]
Camb[...]
May [...]

[P]urchased by Heman Burr Leonard
[J]une 24, 1931.

ÉLÉMENTS

DE LA THÉORIE DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

26521. PARIS. — GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

ÉLÉMENTS

DE LA THÉORIE DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

Jules TANNERY,
Sous-Directeur des Études scientifiques
à l'École Normale supérieure.

Jules MOLK,
Professeur à la Faculté des Sciences
de Nancy.

TOME IV.

CALCUL INTÉGRAL (IIe Partie).

APPLICATIONS.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME IV.

CALCUL INTÉGRAL

(2e PARTIE).

INVERSION

(suite).

CHAPITRE IX.

Évaluation des intégrales de la forme $\int \frac{dz}{\sqrt{Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4Dz + E}}$ prises le long d'un chemin quelconque, dans le cas où A, B, C, D, E sont réels.

CHAPITRE X.

Intégrales elliptiques.

CHAPITRE XI.

Substitutions birationnelles de Weierstrass. — Intégration de l'équation différentielle $\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4$.

CHAPITRE XII.

Équations aux dérivées partielles.

PREMIÈRES APPLICATIONS DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE I.

Premières applications à la Géométrie et à la Mécanique.

CHAPITRE II.

Premières applications à l'Algèbre et à l'Arithmétique.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

TOME I.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de :*	*Lire :*
12	10	$+\mid a_p$	$+\mid a_p \mid$
44	6	R	$\frac{1}{R}$
159	dernière	$u+a)^2$	$(u+a)^2$

TOME II.

2	10		qui vont *du* point ...
2	Note (2) dernière		*Functionen*
8	7 en remontant		sur la formule $q_1 q_2 q_3 = 1, \ldots$
10	Note (1) 5 en rem.	1845	1843, p. 640, 693, 921, 1151 et 1844, p. 1069; *voir* aussi *Œuvres de Cauchy*, 1re s., t. VIII, p. 367 et 2e s., t. VII, p. 324.
102	17	$a+nb, b]$	$[a+nb, b]$
103	16	$a, 2]$	$[a, 2]$
103	16	$2, a]$	$[2, a]$
104	Note (2)		*Werke*, t. III, p. 189

Ajouter : M. Dedekind a donné une autre solution de cette question difficile (*Journal de Crelle*, t. 83, p. 265 : *Ueber die elliptischen Modulfunctionen*) en suivant d'ailleurs une marche toute différente. M. H. Weber a modifié la solution de M. Dedekind (*Acta mathematica*, t. VI).

Pages.	Lignes.	*Au lieu de :*	*Lire :*
136	dernière	e en passant	et en passant
144	6		$= (-1)^{\sum_{(r)} r} \dfrac{q_0^{n-1}}{q_3^2} Q_3'^2 q^{\frac{n^2-1}{12n} - \sum_{(r)} \frac{r^2}{n^2}}$
178	21	$\mathrm{sn}(u, k) =$	$\mathrm{sn}(u \mid \tau) = \mathrm{sn}(u, k) =$
178	22	$\mathrm{cn}(u, k) =$	$\mathrm{cn}(u \mid \tau) = \mathrm{cn}(u, k) =$
178	23	$\mathrm{dn}(u, k) =$	$\mathrm{dn}(u \mid \tau) = \mathrm{dn}(u, k) =$
193	11		$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$
195	Note (1) dernière	Θ, H	Θ_1, H_1
209	10	$\sum\limits_{n=0}^{=}$	$\sum\limits_{n=0}^{n=\infty}$

TOME III.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de :*	*Lire :*
19	6		$\mathcal{A}_{p,q}(-u) = -\mathcal{A}_{-p,-q}(u)$
19	8		$\prod\limits_{r=1}^{r=n-1} \mathcal{A}_{rp,rq}(u) = \ldots$
44	dernière (2 fois)	Σ	$\Sigma^{(\prime)}$
45	8 et 9	le produit est étendu à ces mêmes combinaisons	l'accent $(\prime)$ veut dire :
46	11 (2 fois)	Σ	$\Sigma^{(\prime)}$
46	14	pour le produit	l'accent $(\prime)$ indique que
52	5 et 6	(CII)	(CII_4)
52	11	(XCVII)	(C_1)
62	2 et 4 en remont.	*numéroter :* (XCVI)	
71	dernière	$= 1$	$= 2^{2n-2}$
74	6	la relation (CII_6)	la troisième relation $(\mathrm{CII}_4$ $\mathrm{dn}^2 u = 1 - Z'(0) + Z'(u)$
79	3	(CX_{4-6})	(XC_{4-6})
93	16	$\mp \wp' u \wp' u$	$+ \wp' u \wp' a$
102	6		$a_0 = n,\ a_1 = 0;\quad b_0 = -\frac{n}{2},\ b_1 = 0$
104	8	*lire :*	

$$B = 4\nu \prod_{p=1}^{p=\nu-1} [\wp u - \wp(\omega_3 + a_{p,0})] \prod_{q=1}^{q=\nu-1} [\wp u - \wp(\omega_1 + a_{0,q})] \prod_{p=1}^{p=\nu-1} \prod_{q=-(\nu-1)}^{q=\nu-1} (\wp u - \wp a_{p,q}) \prod_{q=1}^{q=\nu-1} (\wp u - \wp a_{0,q}).$$

Pages.	Lignes.	*Au lieu de :*	*Lire :*
117	11	le coefficient de i	le coefficient de $\frac{iK'}{K}$
129 130	dernière 1	ces seize développements	de ces développements qui se réduisent à dix
131	6 et 7 en remont.	des seize formules (CVII_{5-6})	des dix formules (CVII_{5-7})
135	5 en remontant	$(1-)^{r-1}$	$(-1)^{r-1}$
140	12	$\frac{1}{\tau}$	$\frac{1}{4}$
140	13	pour $k'K$, $\sqrt{k'}K$	pour $k'K$, $k'K^2$, $kk'K^2$, kK^2, $\sqrt{k'}K$, $\sqrt{k}\sqrt{k'}K$

Pages.	Lignes.	*Au lieu de :*	*Lire :*
148	15	$\int$	$'\int$
158	6	R	R_1
158	8	R'	R'_1
164	4	*numéroter :*	$(CXVIII_3)$
167	2	$\pm \frac{1}{2}$	$\mp \frac{1}{2}$
172	dernière	$\vartheta_3^2(0)$	$\vartheta_3^2(0 \mid \tau)$
183	5	$= 1$	$= \pm 1$
187	7 en remontant	$(CXIX_8)$	$(CXIX_9)$
215	4		$\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0 \mid i) =$
215	10		$e^{\mp\frac{i\pi}{6}}$
233	15	$= \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\sqrt{k}$	$= \pm i\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\sqrt{k}$
243	4 en remontant	$e^{-\frac{\pi i}{}}$	$e^{-\frac{\pi i}{8}}$
249	5	$'\int_0^{\sqrt{k}}$	$'\int_0^{\frac{1}{k}}$
262	5	*lire :*	

$$F(z) = \frac{2\lambda(b^4)\log(z + i\sqrt{1 - z^2})}{i(1 + \sqrt{k'})^2} + \frac{2\sqrt{1 - z^2}}{(1 + \sqrt{k'})^2}\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n b^{4n}\mathcal{G}_n(z);$$

264 4 en remontant *lire :*

$$(CXXVII_3)\quad u = \frac{2\lambda(b^4)\log(z + i\sqrt{1 - z^2})}{i\sqrt{e_1 - e_3}(1 + \sqrt{k'})^2} + \frac{2\sqrt{1 - z^2}}{(1 + \sqrt{k'})^2\sqrt{e_1 - e_3}}\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n b^{4n}\mathcal{G}_n(z).$$

Le lecteur qui voudra se borner à un aperçu de la Théorie des fonctions elliptiques et acquérir seulement les notions les plus indispensables aux Applications des fonctions elliptiques à la Mécanique, pourra se dispenser de lire les Chapitres XI et XII (*numéros* 631 *à* 646).

ÉLÉMENTS

DE LA THÉORIE DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

TOME IV.

CALCUL INTÉGRAL.

INVERSION

(SUITE).

CHAPITRE IX.

ÉVALUATION DES INTÉGRALES DE LA FORME

$$\int \frac{dz}{\sqrt{Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4Dz + E}},$$

PRISES LE LONG D'UN CHEMIN QUELCONQUE, DANS LE CAS OÙ A, B, C, D, E SONT RÉELS.

I. — Évaluation des intégrales de la forme

$$\int \frac{dy}{-\sqrt{4(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}},$$

prises le long d'un chemin quelconque, dans le cas où e_1, e_2, e_3 sont réels.

590. Reprenons l'étude, le long d'un chemin déterminé du plan des y, de l'intégrale $\int \frac{dy}{-\sqrt{Y}}$, où $Y = 4y^3 - g_2 y - g_3$, dans le cas où g_2, g_3 sont réels. Rappelons que, dans ce cas, la fonction $p(u; g_2, g_3)$ dont les coefficients sont réels, prend, en même temps que u, des valeurs réelles ou imaginaires conjuguées.

Considérons d'abord le cas où les racines e_1, e_2, e_3 sont réelles. Nous supposerons $e_1 > e_2 > e_3$ et les nombres ω_1, $\frac{\omega_3}{i}$ réels et positifs [1]. Dans le plan des y, le long de l'axe des quantités réelles pratiquons une coupure de e_1 à e_2, de e_2 à e_3, de e_3 à $-\infty$ et désignons par $\sqrt{Y}$ la fonction de y, holomorphe dans le plan coupé, qui prend des valeurs positives pour de grandes valeurs positives de y. Les signes de la partie réelle et du coefficient de i, dans cette fonction $\sqrt{Y}$, s'obtiennent très aisément sur les bords supérieur ou inférieur des diverses parties de la coupure, et même dans tout le plan des y, si l'on observe qu'ils ne peuvent changer que lorsque la quantité sous le radical est réelle, c'est-à-dire lorsque le point y traverse soit l'axe des quantités réelles, soit l'hyperbole (H) dont l'équation serait $12u^2 - 4v^2 - g_2 = 0$ dans un système de coordonnées u, v, dont les axes coïncideraient avec l'axe des quantités réelles et l'axe des quantités purement imaginaires du plan des y. Comme il est commode d'avoir ces signes dans les applications, on les a indiqués dans la figure (A) du Tableau de formules (CXXX); le premier signe se rapporte à la partie réelle, le second à la partie imaginaire; l'une de ces quantités est nulle sur les lignes de séparation, ce que l'on a indiqué en remplaçant par o l'un des signes $\pm$. Relativement aux coupures, nous conviendrons de regarder le bord supérieur comme appartenant à la moitié supérieure du plan des y, le bord inférieur comme appartenant à la moitié inférieure. Ceci posé, on a le théorème suivant :

Il existe une fonction de y, que nous désignerons par $\arg py$, ayant les propriétés que voici : elle est holomorphe dans tout le plan coupé; pour tout point de ce plan on a $p(\arg py) = y$; quand y n'est pas sur une coupure on peut mettre $\arg py$ sous la forme $t\omega_1 + t'\omega_3$, t et t' étant des nombres réels, satisfaisant aux conditions $0 < t < 1$, $-1 < t' < 1$; suivant que y est sur la coupure qui va de e_1 à e_2, de e_2 à e_3, de e_3 à $-\infty$, on peut mettre

[1] Observons en passant que l'on a $\omega_1 \gtrless \frac{\omega_3}{i}$ suivant que l'on a $e_2 \gtrless 0$, ainsi qu'il résulte des expressions de K, K' (ou x, x') au moyen de k^2 (ou $\varkappa$) et de ce que l'on a, suivant les deux cas, $k^2 \gtrless \frac{1}{2}$ et, par suite, $k^2 \gtrless k'^2$. On voit aussi que quand k^2 décroît de 1 à 0, le rapport $\frac{\omega_3}{i\omega_1}$ croît de 0 à l'infini.

$\arg py$ sous la forme $\omega_1 \mp \omega_3 t_1$, $\omega_1 t_1 \mp \omega_3$, $\mp \omega_3 t_1$, où t_1 est réel et compris entre 0 et 1, et où il faut prendre le signe supérieur ou inférieur suivant que l'on est sur le bord supérieur ou inférieur de la coupure. Ces conditions permettent, pour chaque valeur de y, de calculer sans ambiguïté la valeur correspondante de $\arg py$ en se reportant au Tableau (CXXIX_{1-2}); t' est d'ailleurs négatif ou positif suivant que le point y appartient à la moitié supérieure ou inférieure du plan; t' est nul quand y est réel, compris entre e_1 et $+\infty$.

Si l'on admet pour un instant l'existence de cette fonction holomorphe, inverse de la fonction p, on déduit immédiatement de l'identité $p(\arg py) = y$ que la dérivée, prise par rapport à y, de la fonction $\arg py$ est égale, au signe près, à $\dfrac{-1}{\sqrt{Y}}$; elle lui est précisément égale, en adoptant le sens prescrit pour le dénominateur, puisqu'elle est négative pour de grandes valeurs positives de y. On voit donc que l'étude de l'intégrale envisagée se ramène à celle de la fonction $\arg py$.

591. L'existence de la fonction $\arg py$ résulte aisément de la représentation conforme d'un demi-rectangle des périodes de la fonction pu, au moyen de la relation $y = pu$ [1]. Nous choisirons, pour le rectangle des périodes de la fonction pu, le rectangle dont les sommets sont $\omega_1 - \omega_3$, $\omega_1 + \omega_3$, $-\omega_1 + \omega_3$, $-\omega_1 - \omega_3$, qui est symétrique par rapport aux axes des quantités réelles et purement imaginaires. L'équation (en u) $y = pu$ admet deux racines situées dans ce rectangle, figurées par deux points symétriques par rapport au point 0; elle admet par conséquent une racine dans le rectangle (R) dont les sommets sont $\omega_1 - \omega_3$, $\omega_1 + \omega_3$, ω_3, $-\omega_3$; cette racine est unique si elle est figurée par un point *intérieur* à (R); mais si la racine u est un point du périmètre de (R), le point u' symétrique de u par rapport à l'axe des quantités réelles sera encore une racine de l'équation $y = pu$, puisque l'on aura alors, suivant le côté où se trouve le point u, l'une des trois égalités $u + u' = 0$, $u - u' = \pm 2\omega_3$, $u + u' = 2\omega_1$ et, dans tous les cas, $pu' = pu = y$; u et u' étant imaginaires conjugués

---

(1) *Voir* SCHWARTZ, *Formules*, etc., art. 51, 52.

ainsi que les quantités égales pu, pu', y est forcément réel. On prévoit ainsi que l'image sur le plan des y du rectangle (R) du plan des u remplira tout le plan des y et que l'image du périmètre de (R) se fera deux fois quelque part sur l'axe des quantités réelles.

Dans le plan des u, l'axe des quantités réelles partage le rectangle (R) en deux rectangles (R_1), (R_2), symétriques par rapport à cet axe et dont les images seront, dans le plan des y, aussi symétriques par rapport à l'axe des quantités réelles. Nous désignerons par (R_1) le rectangle situé dans la région supérieure du plan des u : ses sommets sont les points 0, ω_1, $\omega_1 + \omega_3$, ω_3. Suivant que e_2 est positif, nul, ou négatif, la base de ce rectangle sera plus longue, de même longueur ou plus courte que sa hauteur. L'image de ses côtés, pris dans l'ordre adopté pour les sommets, de façon que son périmètre soit parcouru dans le sens direct, se fait évidemment sur les segments $+\infty \ldots e_1$, $e_1 \ldots e_2$, $e_2 \ldots e_3$, $e_3 \ldots -\infty$ de l'axe des quantités réelles du plan des y. Au rectangle (R_1) substituons une figure (S_1), qui en diffère infiniment peu, obtenue en décrivant de chacun des sommets de (R_1) comme centre, avec un rayon infiniment petit, un quart de cercle situé dans l'intérieur du rectangle et en supprimant de (R_1) les petites parties limitées par ces quarts de cercle; la figure (S_1) a huit côtés, quatre rectilignes et quatre circulaires. La fonction $p'u$ ne s'annule et ne devient infinie ni sur le contour de (S_1) ni à l'intérieur; le principe de la conservation des angles s'applique donc sans restriction à la représentation conforme de (S_1) par la formule $y = pu$. Supposons que le point u parte du sommet de (S_1) situé sur l'axe des quantités réelles, dans le voisinage de 0, puis décrive les huit côtés du contour de (S_1) dans le sens direct; suivons le mouvement correspondant du point $y = pu$. Il partira d'un point infiniment éloigné, vers $+\infty$, de l'axe des quantités réelles et se mouvra sur cet axe en se rapprochant du point e_1 sans y parvenir, décrira approximativement, autour de e_1 comme centre, un demi-cercle infiniment petit, situé dans la région inférieure du plan, se mouvra sur l'axe des quantités réelles en se rapprochant de e_2 sans l'atteindre, décrira approximativement, autour de e_2 comme centre, un demi-cercle infiniment petit situé dans la région inférieure du plan, se mouvra sur l'axe des quantités réelles en se rapprochant de e_3 sans l'atteindre, décrira encore approximativement, autour

de e_3 comme centre, un demi-cercle infiniment petit situé dans la région inférieure du plan, recommencera à se mouvoir sur l'axe des quantités réelles jusque vers $-\infty$, et décrira enfin approximativement, dans la région inférieure du plan, un demi-cercle de rayon infiniment grand, de centre o, qui ira rejoindre le point de départ vers $+\infty$. Dans l'image, les mouvements rectilignes correspondent aux côtés rectilignes de la figure (S_1) et n'ont pas besoin d'être expliqués davantage; les mouvements circulaires approximatifs correspondent à la description des côtés circulaires de (S_1); qu'ils soient tels que nous l'avons dit, c'est ce qui résulte, pour les trois premiers, de ce que le développement suivant les puissances de u de la fonction paire $p(\omega_\alpha + u) - e_\alpha$ commence par un terme en u^2, pour le demi-cercle infiniment grand, de ce que le développement de pu commence par u^{-2}.

Dans le mouvement, le contour de l'aire infiniment grande qui représente (S_1) est décrit dans le sens direct comme le contour de (R_1). Il en résulte que si l'on considère un point y_0 situé à l'intérieur de l'aire qui forme l'image de (S_1), le vecteur qui va de ce point y_0 au point mobile y qui décrit le contour de cette image, tourne de 2π quand le point u décrit le contour de (R_1); on en conclut, en raisonnant comme au n° 508, que l'équation (en u) $y_0 = pu$ admet une racine et une seule figurée par un point intérieur à (R_1), ce qui est conforme à ce que l'on a dit au début. On voit donc que l'image de (R_1) se fait sur la moitié inférieure du plan des y; le périmètre de (R_1) a son image sur l'axe des quantités réelles : ce périmètre fait partie de la figure (R_1); nous conviendrons de regarder les images des côtés qui vont de ω_1 à $\omega_1 + \omega_3$, de $\omega_1 + \omega_3$ à ω_3, de ω_3 à o, comme se faisant sur les bords *inférieurs* des portions de coupure qui vont de e_1 à e_2, de e_2 à e_3, de e_3 à $-\infty$; quant au côté qui va de o à ω_1, son image est sur la portion non coupée de l'axe des quantités réelles. La fonction $\arg py$ est alors définie sans ambiguïté pour tous les points y de la moitié inférieure du plan des y, y compris les bords inférieurs des coupures : sa valeur est cette racine unique, définie plus haut, de l'équation $y = pu$, racine figurée par un point du rectangle (R_1) ou de son périmètre.

L'image du rectangle (R_2) se fait symétriquement sur la partie supérieure du plan des y et permet de compléter la définition de

la fonction arg py. Les images des côtés qui vont de ω_1 à $\omega_1 - \omega_3$, de $\omega_1 - \omega_3$ à $-\omega_3$, de $-\omega_3$ à o, se font sur les bords *supérieurs* des portions de coupure qui vont de e_1 à e_2, de e_2 à e_3, de e_3 à $-\infty$, en sorte que les bords supérieur et inférieur d'une coupure sont les images de deux points différents. On a précisément introduit les coupures pour que les points du plan des u situés à l'intérieur ou sur le périmètre du rectangle des périodes (R) et les points du plan des y se correspondissent d'une façon *univoque*.

592. Les propriétés énoncées de la fonction arg py sont maintenant évidentes; elle est holomorphe dans le plan coupé en vertu de la théorie des fonctions implicites (note I, n° 357). Quelques autres propriétés de la même fonction se déduisent immédiatement des remarques suivantes.

Les parallèles aux côtés du rectangle (R) ont pour images, dans le plan des y, des arcs de courbes *algébriques*, comme il résulte de la formule d'addition de la fonction pu. Considérons en particulier, dans le plan des u, le segment de droite qui va de $\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_3$ à $\frac{1}{2}\omega_3$; il partage le rectangle (R_1) en deux rectangles (r_1), (r_2) dont le second repose sur l'axe des quantités réelles.

La première formule (LX_4), en y supposant $\alpha = 3$ et en y faisant $u = u' - \frac{1}{2}\omega_3$, donne

$$\sqrt{p\left(u' - \tfrac{1}{2}\omega_3\right) - e_3}\,\sqrt{p\left(u' + \tfrac{1}{2}\omega_3\right) - e_3} = k(e_1 - e_3).$$

Si u' est réel, les deux facteurs qui figurent dans le premier membre sont conjugués; leur produit représente la distance du point $y = p(u' + \frac{1}{2}\omega_3)$ au point e_3, distance qui est constante en vertu de l'égalité même; le point $p(u' + \frac{1}{2}\omega_3)$ est donc sur le cercle (e_3) de centre e_3 et de rayon $k(e_1 - e_3)$; les points e_1, e_2 sont symétriques (n° 559) par rapport à ce cercle; lorsque u' varie de ω_1 à o, le point $u = u' + \frac{1}{2}\omega_3$ décrit dans le plan des u le segment considéré, et son image $y = pu$ décrit, dans le plan des y, du point $p = e_3 + k(e_1 - e_3)$ au point $q = e_3 - k(e_1 - e_3)$, la moitié du cercle (e_3) située au-dessous de l'axe des quantités réelles, puisque u se meut dans (R_1). L'image de (r_1) se fait à l'intérieur de ce demi-cercle, celle de (r_2) sur la région du demi-plan inférieur qui est en dehors. Désignons par (r_3), (r_4) les rec-

tangles qui, dans le plan des u, sont, par rapport à l'axe des quantités réelles, les symétriques des rectangles (r_2), (r_1); leurs images seront, dans le plan des y, symétriques par rapport à l'axe des quantités réelles des images de ces derniers rectangles; l'image du segment qui va de $\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_3$ à $-\frac{1}{2}\omega_3$ se fait sur la moitié supérieure du cercle (e_3). En représentant par $\omega_1 t + \omega_3 t'$ la valeur de $\arg p y$, $|t'|$ sera inférieur ou supérieur à $\frac{1}{2}$, suivant que y sera extérieur ou intérieur au cercle (e_3). On démontrerait de même que l'image du segment qui va de $\frac{1}{2}\omega_1 - \omega_3$ à $\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_3$ est un cercle (e_1) de centre e_1 et de rayon $k'(e_1 - e_3)$; suivant que le point y est extérieur ou intérieur à ce cercle (e_1), $|t|$ est inférieur ou supérieur à $\frac{1}{2}$.

593. De l'égalité

$$-\frac{1}{\sqrt{Y}} = \frac{d}{dy}\arg p y,$$

on déduit maintenant que l'intégrale $\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{-\sqrt{Y}}$, où le chemin qui va de y_1 à y_2 ne traverse pas de coupure et où $\sqrt{Y}$ a le sens précisé au début, a pour valeur $\arg p y_2 - \arg p y_1$. Ce résultat subsiste si le chemin d'intégration suit le bord d'une coupure, sans la traverser.

Si le chemin d'intégration traverse la coupure, nous conviendrons de désigner encore, en chaque point de ce chemin, par $\sqrt{Y}$ la fonction de y, holomorphe dans le plan coupé des y, définie au début, tandis que nous désignerons par $\underline{\sqrt{Y}}$ la fonction obtenue par continuation, le long du chemin d'intégration, de la fonction qui coïncide avec $\sqrt{Y}$ au début de ce chemin. Si cette fonction $\underline{\sqrt{Y}}$ coïncidait avec $\sqrt{Y}$ avant de traverser une coupure, on aurait nécessairement $\underline{\sqrt{Y}} = -\sqrt{Y}$ après avoir traversé cette coupure, et inversement. Pour évaluer l'intégrale $\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{-\underline{\sqrt{Y}}}$, prise le long d'un chemin quelconque, qui peut traverser un nombre quelconque de fois les coupures et qui va d'un point quelconque y_1 du plan des y à un point quelconque y_2 de ce plan, sans passer toutefois par les points e_1, e_2, e_3, il suffira de fractionner le chemin donné en parties qui restent chacune dans le plan coupé et d'évaluer sépa-

rément chacune des parties correspondantes en remplaçant, suivant les cas, $\underline{\sqrt{Y}}$ par $\sqrt{Y}$ ou par $-\sqrt{Y}$.

Supposons, par exemple, que le chemin d'intégration traverse une seule fois la coupure de bas en haut en un point α. Nous distinguerons les deux points α', α'' qui coïncident avec α, mais qui sont situés le premier sur le bord inférieur, le second sur le bord supérieur de la coupure, et nous aurons

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{-\underline{\sqrt{Y}}} = \int_{y_1}^{\alpha'} \frac{dy}{-\underline{\sqrt{Y}}} + \int_{\alpha''}^{y_2} \frac{dy}{-\underline{\sqrt{Y}}} = \int_{y_1}^{\alpha'} \frac{dy}{-\sqrt{Y}} \mp \int_{\alpha''}^{y_2} \frac{dy}{-\sqrt{Y}},$$

où l'on doit prendre le signe inférieur dans le cas seulement où l'on traverse la coupure entre e_2 et e_3. On aura donc, en observant la même règle pour les signes,

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{-\underline{\sqrt{Y}}} = (\arg p\alpha' \pm \arg p\alpha'') - (\arg p y_1 \pm \arg p y_2);$$

d'ailleurs la première parenthèse se réduit à $2\omega_1$, $2\omega_3$ ou 0, suivant que α est entre e_1 et e_2, e_2 et e_3, e_3 et $-\infty$.

Nous nous contentons de signaler les résultats suivants, que l'on peut d'ailleurs lire sur la figure (A),

$$\int_{+\infty}^{e_1}{}' \frac{dy}{-\sqrt{Y}} = \omega_1, \quad \int_{e_1}^{e_2}{}' \frac{dy}{-\sqrt{Y}} = -\int_{e_3}^{-\infty}{}' \frac{dy}{-\sqrt{Y}} = \omega_3, \quad \int_{e_2}^{e_3}{}' \frac{dy}{-\sqrt{Y}} = -\omega_1,$$

la seconde et la troisième intégrales étant prises sur le bord *inférieur* de la coupure. Si on les prenait sur le bord supérieur de la coupure, leurs valeurs changeraient de signe.

Ces formules peuvent être encore écrites sous les formes

$$\text{(CXXX)} \quad \int_{e_3}^{e_2}{}' \frac{dy}{|\sqrt{Y}|} = \int_{e_1}^{\infty}{}' \frac{dy}{|\sqrt{Y}|} = \omega_1, \qquad \int_{-\infty}^{e_3}{}' \frac{dy}{|\sqrt{Y}|} = \int_{e_2}^{e_1}{}' \frac{dy}{|\sqrt{Y}|} = \frac{\omega_3}{i}.$$

Pour $g_3 = 0$ ($e_2 = 0$, $e_3 = -e_1$, $k^2 = \frac{1}{2}$), on a en particulier $\omega_1 = \frac{\omega_3}{i}$; la figure formée par les quatre points $0, \omega_1, \omega_1 + \omega_3, \omega_3$, est un carré.

II. — Évaluation des intégrales de la forme
$$\int \frac{dy}{-\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}},$$
prises le long d'un chemin quelconque, dans le cas où e_2 est un nombre réel et où e_1, e_3 sont des nombres imaginaires conjugués.

594. Supposons maintenant que deux des racines de Y soient imaginaires. Reprenant les notations du n° 565, nous supposerons $e_1 = A + Bi$, $e_3 = A - Bi$, $e_2 = -2A$, $B > 0$; ω_1 et ω_3 sont formés comme on l'a expliqué dans le même numéro, et sont des quantités conjuguées; on les calculera au moyen des Tableaux (CXXV) ou (CXXVI). Les quantités $\sqrt{e_2 - e_1}$, $\sqrt{e_2 - e_3}$ sont aussi conjuguées, comme il résulte, si l'on veut, des formules (XI_6). Il est aisé de vérifier que les signes de la partie réelle et du coefficient de i dans $\sqrt{Y}$ ne peuvent changer que sur l'axe des quantités réelles et sur l'hyperbole (H) qui, cette fois, passe par les points e_1, e_3. Ces signes sont indiqués sur la figure (B) du Tableau (CXXXI), en supposant $\sqrt{Y} > 0$ pour les grandes valeurs positives de y. La figure (B) correspond au cas où g_2 et e_2 sont positifs; les modifications relatives aux autres cas n'échapperont pas au lecteur; si en particulier g_2 était nul, l'hyperbole (H) se décomposerait en deux droites passant par l'origine et inclinées de 60° et de 120° sur l'axe des quantités positives.

Dans le plan des y, du point e_2 comme centre, avec un rayon égal à la quantité positive $\sqrt{e_2 - e_1}\sqrt{e_2 - e_3}$, décrivons un cercle que nous désignerons dans ce qui suit par (e_2); il passe par les points e_1, e_3 et rencontre l'axe des quantités réelles en un point m situé entre e_2 et $+\infty$, et en un point m' situé entre e_2 et $-\infty$. Observons de suite que l'on a, en vertu des équations (XVI_2), (VII_9),

$$m = e_2 + \sqrt{e_2 - e_1}\sqrt{e_2 - e_3} = p\left(\frac{\omega_1 + \omega_3}{2}\right),$$

$$m' = e_2 - \sqrt{e_2 - e_1}\sqrt{e_2 - e_3} = p\left(\frac{\omega_3 - \omega_1}{2}\right).$$

Pratiquons une coupure allant de e_1 à e_3 le long de ce cercle, en

passant par le point m, puis le long de l'axe des quantités réelles de m à $-\infty$. Le bord supérieur de cette dernière coupure de $-\infty$ à m sera supposé continué par le bord intérieur de la coupure circulaire de m à e_1; le bord extérieur de la coupure circulaire va sans interruption de e_1 à e_3; le bord intérieur de la coupure circulaire de e_3 à m est continué par le bord inférieur de la coupure rectiligne de m à $-\infty$; le bord de chaque coupure est regardé comme faisant partie de la région du plan qu'il limite. Dans le plan coupé, $\sqrt{Y}$ est une fonction holomorphe de y.

Il existe une fonction que nous désignerons par $\arg py$ et qui jouit des propriétés suivantes : elle est holomorphe dans le plan coupé; en tout point de ce plan on a

$$p(\arg py) = y;$$

sa dérivée est $\frac{1}{\sqrt{Y}}$ en désignant par $\sqrt{Y}$ la fonction holomorphe précisée plus haut. Quand y n'est pas sur une coupure, on peut mettre $\arg py$ sous la forme $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_3)t + (\omega_3 - \omega_1)t'$, où t et t' sont des nombres réels vérifiant les conditions $0 < t < 1$, $-1 < t' < 1$; t' est toujours de signe contraire au coefficient de i dans y. Quand y est sur la coupure circulaire, $\arg py$ peut se mettre sous la forme $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_3) + (\omega_3 - \omega_1)t_1$; t_1 est compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ lorsque y est sur le bord extérieur de la coupure; t_1 est compris soit entre $-\frac{1}{2}$ et -1, soit entre $\frac{1}{2}$ et 1 lorsque y est sur le bord intérieur de la coupure suivant que y est dans la moitié supérieure ou inférieure du plan; en deux points qui coïncident, mais sont sur deux bords opposés, la somme des valeurs de t_1 est égale à ± 1. Quand y est sur la coupure rectiligne, $\arg py$ peut être mis sous la forme $\mp(\omega_3 - \omega_1) + \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_3)t_2$ ou sous la forme $\mp(\omega_3 - \omega_1)t_2$, suivant que y est compris entre m et e_2 ou entre e_2 et $-\infty$; on doit prendre les signes supérieurs ou inférieurs suivant que y est sur le bord supérieur ou inférieur; t_2 est réel, compris entre 0 et 1; en deux points qui coïncident, mais sont sur deux bords opposés, les valeurs de t_2 sont les mêmes. En se reportant au Tableau (CXXIX_{3-4}) on peut donc calculer dans tous les cas, sans ambiguïté, la valeur de $\arg py$ connaissant la valeur de y.

595. On arrive à ce résultat en étudiant l'image obtenue dans le plan des y, par la transformation $y = pu$, du rectangle (R) dont les sommets sont $\frac{1}{2}(3\omega_1 - \omega_3)$, $\frac{1}{2}(3\omega_3 - \omega_1)$, $\omega_3 - \omega_1$, $\omega_1 - \omega_3$, rectangle dans lequel l'équation (en u) $pu - y = 0$ admet une racine qui, en général, est unique; si toutefois cette racine est figurée par un point du périmètre du rectangle, le point symétrique par rapport à l'axe des quantités réelles est aussi une racine. Ceci résulte aisément de ce fait, que le losange dont les sommets sont o, $2\omega_1$, $2\omega_1 + 2\omega_3$, $2\omega_3$ est un parallélogramme des périodes, et de ce que la fonction pu prend des valeurs égales en des points symétriques soit par rapport à ω_1, soit par rapport à ω_3.

L'axe des quantités réelles du plan des u sépare le rectangle (R) en deux rectangles (R_1), (R_2) dont le premier est situé au-dessus de l'axe; les images de ces deux rectangles étant symétriques par rapport à l'axe des quantités réelles du plan des y, il suffit d'étudier l'image du premier. On substitue, à cet effet, à ce rectangle (R_1) une figure infiniment voisine (S_1) que l'on obtient en décrivant à l'intérieur de (R_1), avec des rayons infiniment petits, des points o, $\omega_3 - \omega_1$ et ω_3 comme centres, d'une part deux quarts de cercle, de l'autre un demi-cercle, et en supprimant les petites parties de (R_1) qui limitent ces quarts de cercle et ce demi-cercle. La figure (S_1) a huit côtés, cinq rectilignes, trois circulaires. Dans cette figure et sur le contour, les fonctions pu, $p'u$ sont holomorphes, la seconde ne s'annule pas. Supposons que le point u parte du sommet de (S_1) infiniment voisin de o, situé sur l'axe des quantités réelles, puis décrive le contour de (S_1) dans le sens direct. Son image $y = pu$, dans le plan des y, partira d'un point voisin de $+\infty$, sur l'axe des quantités réelles et suivra d'abord cet axe jusqu'au point m. A partir du point m, l'image $y = pu$ se mouvra sur le cercle (e_2) ainsi qu'il résulte de la formule

$$\sqrt{p\left(\frac{\omega_1+\omega_3}{2} + u'i\right) - e_2}\sqrt{p\left(\frac{\omega_1+\omega_3}{2} - u'i\right) - e_2} = m - e_2,$$

qui montre que la distance du point pu au point e_2 reste constante tant que le point u est sur la perpendiculaire à l'axe des quantités réelles menée par $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_3)$; quand u décrira le côté de (S_1) qui va de $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_3)$ à un point voisin de ω_3, le point $y = pu$, partant de m, suivra le cercle (e_2) en descendant dans la région inférieure

du plan des y, comme il résulte du principe de la conservation des angles, et s'arrêtera en un point voisin de e_3. Le point u décrivant ensuite le petit demi-cercle autour de ω_3, son image $y = pu$ décrira approximativement un petit cercle autour de e_3 en tournant dans le sens indirect, comme il résulte du développement de $p(\omega_3 + u)$ suivant les puissances de u. Le point u décrivant le côté suivant de (S_1), son image remonte le long du cercle (e_2) de e_3 à m, en sorte que les images des trois côtés de (S_1), qui relient $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_3)$ à $\frac{1}{2}(3\omega_3 - \omega_1)$, forment un *lacet* à tige circulaire. Quand u décrit le côté qui va de $\frac{1}{2}(3\omega_3 - \omega_1)$ à un point voisin de $\omega_3 - \omega_1$, son image va de m à un point voisin de e_2 sur l'axe des quantités réelles. Quand u décrit le quart de cercle autour de $\omega_3 - \omega_1$, son image décrit approximativement un demi-cercle infiniment petit, de centre e_2, en restant au-dessous de l'axe des quantités réelles. Le côté suivant a son image sur l'axe des quantités réelles, d'un point voisin de e_2 à un point voisin de $-\infty$. Enfin le dernier côté, le petit quart de cercle, a pour image un demi-cercle de centre o, de rayon infiniment grand.

Il serait aisé de reconnaître que l'arc du cercle (e_2) qui va de e_3 à m' est l'image du segment qui va de ω_3 à $\frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_1)$.

En répétant le raisonnement du n° 508, on voit maintenant que l'image de (R_1) remplit le demi-plan des y, au-dessous de l'axe des quantités réelles. L'image de (R_2) remplit donc le demi-plan au-dessus. Ainsi l'image de (R) remplit le plan tout entier. Il convient, pour la continuité, de regarder les images des portions du périmètre qui vont de o à $\omega_3 - \omega_1$ et de o à $\omega_1 - \omega_3$ comme se faisant respectivement sur les bords inférieur et supérieur de la coupure rectiligne qui va de $-\infty$ à e_2; les images des côtés qui vont de $\omega_3 - \omega_1$ à $\frac{1}{2}(3\omega_3 - \omega_1)$ et de $\omega_1 - \omega_3$ à $\frac{1}{2}(3\omega_1 - \omega_3)$ comme se faisant sur les bords inférieur et supérieur de la coupure rectiligne qui va de e_2 à m; les images des portions de côté qui vont de $\frac{1}{2}(3\omega_3 - \omega_1)$ à ω_3 et de $\frac{1}{2}(3\omega_1 - \omega_3)$ à ω_1, comme se faisant sur le bord intérieur de la coupure circulaire qui va de m à e_3 et de m à e_1; enfin les images de la portion de côté qui va de ω_3 à ω_1 comme se faisant sur le bord extérieur de la coupure circulaire qui va de e_3 à e_1. Cette description suffit, en raisonnant comme au paragraphe précédent, à justifier la proposition annoncée; elle montre la nécessité d'introduire les coupures considérées, et donne les rensei-

gnements essentiels sur les valeurs que prend la fonction $\arg py$ sur les bords des coupures ([1]).

596. Les conclusions sont analogues à celles du paragraphe précédent et l'on obtient aisément les résultats suivants :

$$\int_m^\infty \frac{dy}{-\sqrt{Y}} = \frac{\omega_2}{2}, \qquad \int_m^{e_1} \frac{dy}{-\sqrt{Y}} = -\int_m^{e_3} \frac{dy}{-\sqrt{Y}} = \frac{\omega_3 - \omega_1}{2},$$

([1]) Des considérations toutes pareilles s'appliquent à la détermination de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$, où $X = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$, prise le long d'un chemin déterminé, lorsque k^2 est réel et plus petit que 1. Dans le plan des x on pratique deux coupures le long de l'axe des quantités réelles de $+1$ à $+\infty$, de -1 à $-\infty$. La fonction $\sqrt{X}$ assujettie à être égale à 1 pour $x = 0$ est alors définie sans ambiguïté dans tout le plan, y compris les bords supérieur et inférieur des coupures. Si l'on considère la fonction $\operatorname{sn}(u \mid \tau)$ formée au moyen de la quantité $\tau = \frac{iK'}{K}$, où K et K' ont le sens précisé au n° 521, il existe une fonction que nous désignerons par $\arg \operatorname{sn} x$ qui jouit des propriétés suivantes : elle est définie pour toute valeur de x appartenant au plan coupé ; en tout point de ce plan elle vérifie la relation $\operatorname{sn}(\arg \operatorname{sn} x) = x$; sa dérivée est $\frac{1}{\sqrt{X}}$; on peut la mettre sous la forme $Kt + iK't'$, où t et t' sont des nombres réels compris entre -1 et $+1$, et respectivement de mêmes signes que la partie réelle et le coefficient de i dans x. Quand x n'est pas sur une coupure, t et t' sont différents de ± 1. Quand x est sur la coupure de droite, $\arg \operatorname{sn} x$ est de la forme $K \pm iK't_1$ ou $\pm iK' + Kt_1$, suivant que x est entre 1 et $\frac{1}{k}$ ou entre $\frac{1}{k}$ et $+\infty$; on doit prendre le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que x est sur le bord supérieur ou sur le bord inférieur ; t_1 est réel compris entre 0 et 1 ; on a, en particulier,

$$\arg \operatorname{sn} 1 = K, \qquad \arg \operatorname{sn} \frac{1}{k} = \pm iK' + K ;$$

les valeurs de t_1 pour deux points qui coïncident, mais appartiennent à deux bords différents, sont égales. Quand x est sur la coupure de gauche, $\arg \operatorname{sn} x$ est de la forme $-K \pm iK't_1$ ou $\pm iK' - Kt_1$, suivant que x est entre -1 et $-\frac{1}{k}$ ou entre $-\frac{1}{k}$ et $-\infty$; la signification de t_1, la règle des signes restent les mêmes ; on a, en particulier,

$$\arg \operatorname{sn}(-1) = -K, \qquad \arg \operatorname{sn}\left(-\frac{1}{k}\right) = -K \pm iK'.$$

On parvient à ce résultat en faisant l'image, sur le plan des x, du rectangle du plan des u dont les sommets sont les points $\pm K \pm iK'$, image qui se déduit par symétrie de celle du rectangle dont les sommets sont 0, K, $K + iK'$, iK'.

Il est maintenant clair que, si l'on se donne x, on pourra calculer $\arg \operatorname{sn} x$ sans

les deux dernières intégrales étant prises le long des bords *intérieurs* de la coupure circulaire;

$$'\int_m^{e_2} \frac{dy}{-\sqrt{Y}} = \frac{\omega_2}{2}, \qquad '\int_{e_2}^{-\infty} \frac{dy}{-\sqrt{Y}} = \omega_1 - \omega_3,$$

où, dans la seconde intégrale, le chemin suit le bord *inférieur* de la coupure rectiligne;

$$'\int_{e_3}^{e_1} \frac{dy}{-\underline{\sqrt{Y}}} = \omega_2 \quad \text{ou} \quad \omega_1 - \omega_3,$$

suivant que e_2 est positif ou négatif; dans cette dernière égalité les valeurs de $\underline{\sqrt{Y}}$ se déduisent par continuation de la supposition $\underline{\sqrt{Y}} = \sqrt{Y}$ pour les points y du chemin d'intégration situé en dessous de l'axe des quantités réelles. De ces formules, on déduit sans peine celles du Tableau (CXXXI); toutes ces formules se lisent d'ailleurs sur la figure (B) du même Tableau.

III. — Substitutions linéaires permettant de transformer $\dfrac{dz}{\sqrt{Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4Dz + E}}$ en $\dfrac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$.

597. Nous allons montrer maintenant comment toute différentielle de la forme $\frac{dz}{\sqrt{Z}}$, où Z est un polynome quelconque du troisième ou du quatrième degré à racines inégales, se ramène à une différentielle de la forme $\frac{dy}{-\sqrt{Y}}$, où $Y = 4y^3 - g_2 y - g_3$, par une substitution linéaire définie par l'une ou l'autre des formules

ambiguïté à l'aide des séries (CXXVII_2), pourvu que, quand x est sur une coupure, on dise sur quel bord il se trouve. Il résulte de la théorie des fonctions implicites que $\arg \operatorname{sn} x$ est une fonction holomorphe dans le plan coupé des x. Les conséquences de ces propositions, pour le calcul des intégrales de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ où $X = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$, $0 < k^2 < 1$, sont toutes semblables à celles qui ont été développées dans le texte pour les intégrales de la forme $\int \frac{dy}{-\sqrt{Y}}$; le lecteur les établira sans peine.

équivalentes de la forme

$$z = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}, \qquad y = \frac{\delta z - \beta}{-\gamma z + \alpha} = -\frac{\delta}{\gamma} + \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{-\gamma^2 z + \alpha\gamma},$$

où α, β, γ, δ sont des constantes telles que $\alpha\delta - \beta\gamma$ soit différent de zéro. Par ces formules, les points du plan des y et ceux du plan des z se correspondent d'une façon univoque.

Nous réunissons, dans ce qui suit, quelques propriétés géométriques importantes de cette correspondance, grâce auxquelles le lecteur n'aura aucune peine à établir les résultats ultérieurs. Nous supposons γ différent de o, sans quoi la correspondance se réduirait à une similitude.

Nous désignerons par T et S les points respectivement situés dans le plan des z et dans le plan des y dont les affixes sont $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $-\frac{\delta}{\gamma}$; le point T correspond à $y = \infty$, le point S à $z = \infty$. A tout cercle ou droite du plan des z qui ne passe pas par T correspond un cercle du plan des y, cercle qui passe par S s'il correspond à une droite. A tout cercle ou droite du plan des z qui passe par T correspond une droite du plan des y, laquelle passe par S si elle correspond à une droite. Ces propositions résultent de ce que la formule de transformation peut s'écrire

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2},$$

en désignant par y_1, y_2, y_3 les points du plan des y qui correspondent aux points z_1, z_2, z_3 du plan des z, lesquels peuvent être pris arbitrairement. Si l'argument (trigonométrique) de $\frac{z - z_1}{z - z_2}$ reste constant, en sorte que le point z décrive un cercle passant par les points z_1, z_2, l'argument de $\frac{y - y_1}{y - y_2}$ restera aussi constant, et le point y décrira un cercle passant par les points y_1, y_2. De même, si la valeur absolue de $\frac{z - z_1}{z - z_2}$ reste constante, en sorte que le point z décrive un cercle par rapport auquel les points z_1, z_2 soient symétriques (n° 559), la valeur absolue de $\frac{y - y_1}{y - y_2}$ restera constante, en sorte que le point y décrira un cercle (ou une droite)

par rapport auquel les points y_1, y_2 seront symétriques. La transformation précédente conserve donc la symétrie des points par rapport aux cercles et aux droites. La même conclusion résulte aisément du principe de la conservation des angles et de la considération du faisceau de cercles orthogonaux à un cercle qui passent par deux points symétriques par rapport à ce cercle. Le centre d'un cercle et le point ∞ de son plan peuvent être regardés comme symétriques. Si donc on désigne par (C) un cercle ou une droite du plan des y, par (D) le cercle ou la droite du plan des z qui lui correspond, le centre de (D) sera le correspondant, dans le plan des z, du point du plan des y symétrique de S par rapport à (C), le centre de (C) sera le correspondant, dans le plan des y, du point du plan des z symétrique de T par rapport à (D). Si (C) et (D) sont des cercles véritables, les points S et T sont respectivement extérieurs tous les deux, ou intérieurs tous les deux, aux cercles (C) et (D); dans le premier cas, les parties des plans des y et des z respectivement extérieures ou intérieures aux cercles (C), (D) se correspondent; dans le second, la partie intérieure à un cercle correspond à la partie extérieure à l'autre. Si T est sur le cercle (D), (C) est une droite partageant le plan des y en deux régions; celle qui contient S correspond à la région du plan des z extérieure à (D). De même, si (D) est une droite et (C) un véritable cercle, passant nécessairement par S, la région du plan des z qui contient T correspond à la région du plan des y extérieure au cercle (C). Si (D) et (C) sont deux droites passant nécessairement la première par T, la seconde par S, la correspondance entre les points des deux droites est homographique, en sorte que, si le point z décrit la droite (D) toujours dans le même sens, en passant par T, le point y se meut sur la droite (C) en allant toujours dans le même sens jusqu'au point à l'infini dans cette direction, point qu'il atteint quand z arrive en T, passe brusquement, dès que le point z dépasse T, au point à l'infini dans l'autre direction et recommence à se mouvoir dans le même sens que tout d'abord.

Quand le point z décrit une courbe continue qui ne passe pas par T, ce mouvement même définit à chaque instant la région voisine du plan des z qu'il a à sa droite ou à sa gauche; de même le mouvement correspondant du point y. En vertu du principe de la

conservation des angles, les deux régions à droite se correspondent dans les deux plans, ainsi que les deux régions à gauche. Cette remarque s'applique naturellement aux cas qui viennent d'être passés en revue. Faisons encore l'observation suivante : si (C) et (D) sont deux droites correspondantes et si l'on fait tourner (D) uniformément autour de T, (C) tournera uniformément autour de S ; les deux révolutions seront synchrones et les sens de rotation inverses.

598. Par la substitution précédente, l'expression différentielle $\frac{dz}{\sqrt{Z}}$, où Z est un polynome du troisième ou du quatrième degré, à racines inégales, se change identiquement en $\frac{dy}{-\sqrt{Y}}$, si l'on pose

$$\sqrt{Y} = -\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\alpha-\gamma z)^2}\sqrt{Z} = -\frac{(\gamma y+\delta)^2}{\alpha\delta-\beta\gamma}\sqrt{Z};$$

Y est un polynome du quatrième degré, qui ne s'abaisse au troisième que si $\frac{\alpha}{\gamma}$ est racine de Z ou si, Z étant du troisième degré, γ est nul.

Si le polynome $Z = Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4Dz + E$ est du quatrième degré, nous désignerons ses racines, *rangées dans un ordre que nous nous réservons de spécifier*, par z_1, z_2, z_3, z_4; si nous ne voulons pas spécifier cet ordre, nous désignerons par λ, μ, ν, ρ les nombres 1, 2, 3, 4 rangés dans un ordre déterminé quelconque et nous emploierons les notations z_λ, z_μ, z_ν, z_ρ pour désigner les racines. Si A est nul, nous supposerons $\lambda = 4$, et c'est la racine z_λ ou z_4 qui disparaîtra, ou, si l'on veut, deviendra infinie.

Nous allons chercher à déterminer les coefficients de la substitution linéaire de façon que Y soit de la forme $4y^3 - g_2 y - g_3$. A cet effet, nous choisirons d'abord une des racines de Z pour figurer à la place de $\frac{\alpha}{\gamma}$ dans la formule de transformation qui lie y à z, afin que Y soit du troisième degré ; si nous désignons la racine choisie par z_ρ, nous pouvons écrire cette formule

$$z = z_\rho + \frac{m}{y+n}, \qquad y = -n + \frac{m}{z - z_\rho},$$

en désignant par m et n des constantes. Le polynome Y, ordonné suivant les puissances de $y+n$, prend alors la forme

$$(a)\qquad \mathrm{Y} = \frac{1}{m}\mathrm{Z}'_\rho(y+n)^3 + \frac{1}{2}\mathrm{Z}''_\rho(y+n)^2 + \frac{m}{6}\mathrm{Z}'''_\rho(y+n) + \frac{m^2}{24}\mathrm{Z}^{\text{IV}}_\rho,$$

où Z'_ρ, Z''_ρ, Z'''_ρ, $\mathrm{Z}^{\text{IV}}_\rho$ désignent ce que deviennent les dérivées de Z pour $z = z_\rho$; il aura la forme voulue $4y^3 - g_2 y - g_3$ si l'on détermine m et n par les conditions

$$\frac{1}{m}\mathrm{Z}'_\rho = 4, \qquad \frac{3n}{m}\mathrm{Z}'_\rho + \frac{1}{2}\mathrm{Z}''_\rho = 0;$$

on trouvera ensuite, par un calcul élémentaire,

$$g_2 = \mathrm{AE} + 3\mathrm{C}^2 - 4\mathrm{BD}, \qquad g_3 = \mathrm{ACE} + 2\mathrm{BCD} - \mathrm{AD}^2 - \mathrm{EB}^2 - \mathrm{C}^3;$$

g_2 et g_3 sont les deux invariants de la forme Z; ils ne dépendent pas de la racine z_ρ que l'on a choisie.

Nous rappelons ici la composition des invariants g_2, g_3, au moyen des racines de Z. Si l'on pose

$$\mathrm{L} = (z_1 - z_3)(z_2 - z_4), \quad \mathrm{M} = (z_1 - z_2)(z_3 - z_4), \quad \mathrm{N} = (z_1 - z_4)(z_2 - z_3),$$

on aura (¹)

$$\mathrm{L} = \mathrm{M} + \mathrm{N}$$

et

$$g_2 = \frac{\Lambda^2}{24}(\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2), \qquad g_3 = \frac{\Lambda^3}{432}(\mathrm{L} + \mathrm{M})(\mathrm{L} + \mathrm{N})(\mathrm{M} - \mathrm{N}).$$

Si $\mathrm{Z} = az^3 + 3bz^2 + 3cz + d$ est du troisième degré, on trouvera, pour les invariants g_2, g_3, les valeurs

$$g_2 = \frac{3}{4}(b^2 - ac), \qquad g_3 = \frac{1}{16}(3abc - a^2 d - 2b^3).$$

[Dans ce cas, l'expression différentielle $\frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}}$ se changerait encore en $\frac{dy}{-\sqrt{\mathrm{Y}}}$, par la substitution entière $y = \frac{az+b}{4}$, en supposant $\sqrt{\mathrm{Z}} = -\frac{4}{a}\sqrt{\mathrm{Y}}$ et en conservant pour g_2 et g_3 la même significa-

(¹) *Voir* par exemple le *Traité d'Algèbre supérieure* de M. H. Weber, t. I, p. 242 de la traduction française de M. Griess.

tion; nous ne parlerons plus de cette substitution entière, dont l'étude n'offre aucune difficulté.]

En résumé, si, dans l'expression différentielle $\frac{dz}{\sqrt{Z}}$, on fait la substitution

$$(\text{CXXXII}_1) \qquad z = z_\rho + \frac{\frac{1}{4} Z'_\rho}{y - \frac{1}{24} Z''_\rho}, \qquad y = \frac{1}{24} Z''_\rho + \frac{\frac{1}{4} Z'_\rho}{z - z_\rho},$$

où z_ρ est une racine de Z, cette expression différentielle prend la forme $\frac{dy}{-\sqrt{Y}}$, où l'on a $Y = 4y^3 - g_2 y - g_3$. En deux points correspondants y, z, c'est-à-dire en deux points dont les affixes sont liées par la relation (CXXXII$_1$), les valeurs des radicaux sont liées par la relation

$$(\text{CXXXII}_2) \qquad \sqrt{Y} = \frac{Z'_\rho}{4(z - z_\rho)^2} \sqrt{Z} = \frac{4}{Z'_\rho} \left(y - \frac{1}{24} Z''_\rho\right)^2 \sqrt{Z}.$$

Si l'on veut appliquer les remarques du n° 597, on devra remplacer T par z_ρ et S par $\frac{1}{24} Z''_\rho$.

Les racines e_1, e_2, e_3 de Y se déduisent des racines de Z. Lorsque Z est du quatrième degré, nous désignerons respectivement par e_α, e_β, e_γ les valeurs de y qui correspondent (au sens précédent) aux valeurs z_λ, z_μ, z_ν de z, le point ∞ du plan des y correspondant à z_ρ. Si Z est du troisième degré, nous désignerons par e_β, e_γ les valeurs de y qui correspondent respectivement à z_μ, z_ν : ce sont deux racines de Y; on trouve d'ailleurs aisément

$$e_\beta = \frac{1}{24} Z''_\nu, \qquad e_\gamma = \frac{1}{24} Z''_\mu;$$

la troisième racine e_α de Y apparaît sur l'expression (a) de Y, où l'on doit supposer $Z^{\text{IV}}_\rho = 0$; elle est $-n = \frac{1}{24} Z''_\rho = S$; elle correspond au point ∞ du plan des z.

599. Nous supposerons désormais que les coefficients de Z sont réels; il en sera de même de g_2, g_3, si même on a employé une substitution imaginaire. On a dès lors, en faisant se correspondre les valeurs de y et de z, ainsi que les chemins d'intégra-

tions et les valeurs des radicaux,

$$\int_{z'}^{z''} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \int_{y'}^{y''} \frac{dy}{-\sqrt{Y}} = \arg p y'' - \arg p y',$$

pourvu que le chemin d'intégration relatif à la variable y ne traverse pas de coupure dans le plan des y. Il est bien naturel de tracer dans le plan des z des coupures qui correspondent à celles du plan des y; elles seront les images, dans le plan des z, des côtés du rectangle (R) du plan des u, résultant de la transformation

$$z = z_\rho + \frac{\frac{1}{4} Z'_\rho}{p u - \frac{1}{24} Z''_\rho},$$

et elles permettront de se passer de la variable intermédiaire y. Dans le plan des z coupé, $\sqrt{Z}$ sera d'ailleurs une fonction holomorphe de z, définie, en tel point que l'on voudra, par la formule (CXXXII_2), où $\sqrt{Y}$ a le sens qui a été précisé dans les paragraphes précédents. A la vérité, dans les applications, c'est la détermination de $\sqrt{Z}$ qui est donnée, et l'on en déduit celle de $\sqrt{Y}$ par la formule (CXXXII_2); si la détermination ainsi obtenue pour $\sqrt{Y}$ est contraire à celle qui a été précisée dans les paragraphes précédents, la valeur de $\int_{z'}^{z''} \frac{dz}{\sqrt{Z}}$ sera égale à $\arg p y' - \arg p y''$. La construction des coupures (rectilignes ou circulaires) du plan des z n'offre aucune difficulté : il suffira, dans les différents cas, de se reporter aux propriétés géométriques que nous avons réunies au n° 597, et nous nous contenterons d'expliquer nos notations et d'énoncer les résultats essentiels afin de rendre intelligibles les formules et les figures de notre Tableau de formules.

Observons encore, en général, qu'on peut choisir arbitrairement la racine z_ρ qui figure dans la formule de transformation, mais qu'il y a avantage, quand on n'envisage que les valeurs réelles de z qui rendent Z positif, à choisir une substitution réelle et telle que les valeurs correspondantes de y soient supérieures aux racines réelles de Y, afin que les valeurs de $\arg p y$ soient réelles; on verra que cela est possible, sauf dans le cas où les racines de Z sont toutes les quatre imaginaires. De même, si l'on considérait les valeurs réelles de z qui rendent Z négatif, il y aurait inté-

rêt à choisir la substitution de façon que les valeurs correspondantes de y fussent inférieures aux racines réelles de Y, de façon que $\arg py$ fût purement imaginaire.

On pourrait, dans ce qui suit, supposer que dans Z le coefficient de la plus haute puissance de z est positif, car si la fonction $\sqrt{Z}$ est bien définie, il en sera de même de la fonction $\sqrt{-Z} = i\sqrt{Z}$; si donc, le long d'un chemin déterminé, on sait effectuer l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{-Z}}$, on saura effectuer, le long du même chemin, l'intégrale $\int \frac{dZ}{\sqrt{Z}}$.

IV. — Cas où A est nul.

600. Examinons maintenant les différents cas. Supposons d'abord que $Z = az^3 + \ldots$ soit du troisième degré; nous supposerons $a > 0$; s'il en était autrement, on pourrait utiliser la remarque précédente; mais il vaudrait mieux, ici, commencer par changer z en $-z$.

Il y a lieu de distinguer deux cas suivant la nature des racines de Z. Si ces racines sont réelles, toutes les substitutions seront réelles, ainsi que les racines de Y; si Z n'a qu'une racine réelle, il y aura une substitution réelle par laquelle correspondra, à la racine réelle de Z, une racine réelle de Y; les deux autres racines de Y seront conjuguées.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où les racines de Z sont réelles et désignons-les par z_1, z_2, z_3 en supposant $z_1 > z_2 > z_3$; on suppose aussi, comme d'habitude, $e_1 > e_2 > e_3$. Ces suppositions, jointes aux relations, bien aisées à démontrer,

$$e_\alpha - e_\beta = \frac{a}{4}(z_\rho - z_\nu), \qquad e_\alpha - e_\gamma = \frac{a}{4}(z_\rho - z_\mu),$$

où la correspondance entre les deux systèmes de racines est celle qui a été expliquée n° 598, permettent de montrer que l'on a nécessairement $\alpha = \rho$, $\beta = \nu$, $\gamma = \mu$. Aux points $\infty, z_\mu, z_\nu, z_\rho$ du plan des z correspondent les points $e_\rho, e_\nu, e_\mu, \infty$ du plan des y. Cette

correspondance est donnée en détail par le Tableau suivant pour les différents cas $\rho = 1, 2, 3$.

$a > 0$.	$\rho = 1$.	$\rho = 2$.	$\rho = 3$.
$z = -\infty$	$y = e_1$	$y = e_2$	$y = e_3$
$z = z_3$	$y = e_2$	$y = e_1$	$y = \mp\infty$
$z = z_2$	$y = e_3$	$y = \pm\infty$	$y = e_1$
$z = z_1$	$y = \mp\infty$	$y = e_3$	$y = e_2$
$z = \infty$	$y = e_1$	$y = e_2$	$y = e_3$
Sgn Z'_ρ	$+$	$-$	$+$

La première colonne verticale contient les valeurs $-\infty$, z_3, z_2, z_1, $+\infty$ de z rangées par ordre de grandeurs croissantes; en face de ces valeurs, dans les colonnes suivantes qui se rapportent aux diverses valeurs de ρ, sont placées les valeurs correspondantes de y; les signes $\mp\infty$ que l'on trouve pour $\rho = 1$ et $\rho = 3$ parmi ces valeurs signifient que, z croissant, y, qui décroît en général, passe brusquement de $-\infty$ à $+\infty$ quand z traverse la valeur z_ρ; le signe $\pm\infty$ du cas $\rho = 2$ signifie au contraire que y, qui croît en général avec z, passe de $+\infty$ à $-\infty$ quand z traverse la valeur z_2. Le Tableau donne enfin le signe de Z'_ρ nécessaire pour déduire la définition de $\sqrt{Z}$ de celle de $\sqrt{Y}$. Les images des diverses portions de coupure du plan des y se faisant, dans le plan des z, sur l'axe des quantités réelles, s'aperçoivent immédiatement dans les différents cas. Pour $\rho = 1$ ou 3, la moitié supérieure du plan des z correspond à la moitié inférieure du plan des y; pour $\rho = 2$, les moitiés supérieures des deux plans se correspondent.

Si z ne prend que des valeurs réelles comprises entre z_1 et $+\infty$, on prendra, dans les formules ($\text{CXXXII}_{1,2,4}$) et dans le Tableau que nous venons d'écrire, $\rho = 1$; si z est compris entre z_2 et z_3, on prendra soit $\rho = 2$, soit $\rho = 3$; aux valeurs de z comprises entre les limites d'intégration correspondent alors des valeurs de y comprises entre e_1 et $+\infty$. De même, si z ne prend que des valeurs réelles qui rendent Z négatif, on choisira ρ de manière

que, aux valeurs de z comprises entre les limites d'intégration, correspondent des valeurs de y comprises entre e_3 et $-\infty$. On obtient ainsi les formules (CXXXIII), où il est toujours entendu que les quantités ω_1, ω_3 sont définies au moyen de e_1, e_2, e_3 comme au n° 527.

601. La méthode s'applique naturellement au cas où le polynome Z serait le polynome $4z^3 - g_2 z - g_3$ et se reproduirait en quelque sorte par la substitution. Elle s'applique aussi très aisément aux intégrales du type

$$\int \frac{dz}{\sqrt{4\varepsilon z(z \pm 1)(nz - 1)}},$$

où ε est égal à $+1$ ou à -1 et où n est un nombre réel différent de 0 et de ∓ 1. On trouve ainsi que l'expression $\dfrac{dz}{\sqrt{4\varepsilon z(z \pm 1)(nz - 1)}}$ se change en $\dfrac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$, où g_2, g_3 sont donnés par les formules

$$g_2 = \frac{4}{3}(n^2 \pm n + 1), \qquad g_3 = \frac{4\varepsilon}{27}(1 \mp n)(1 \pm 2n)(2 \pm n),$$

quand on remplace z par l'une ou l'autre des expressions

$$\frac{\mp 3\varepsilon y + n \pm 2}{3\varepsilon y \mp 2n + 1}, \qquad \frac{1}{n}\,\frac{3\varepsilon y \pm 2n + 1}{3\varepsilon y \mp n - 2}, \qquad \frac{\mp 3}{3\varepsilon y \mp n + 1};$$

les valeurs des radicaux $\sqrt{4\varepsilon z(z \pm 1)(nz - 1)}$, $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$ sont telles que leurs rapports soient respectivement

$$\frac{\varepsilon(z \pm 1)^2}{n \pm 1}, \qquad \frac{\varepsilon(nz - 1)^2}{n(1 - n)}, \qquad -\varepsilon z^2;$$

les racines e_1, e_2, e_3 sont les trois nombres $\dfrac{2 \pm n}{3\varepsilon}$, $\dfrac{-1 \pm n}{3\varepsilon}$, $\dfrac{-1 \mp 2n}{3\varepsilon}$ rangés par ordre de grandeur décroissante. Dans toutes ces formules, les signes se correspondent.

Si l'on applique ces substitutions en supposant la variable d'intégration réelle, on obtient en particulier les formules (CXXXIV).

En remplaçant z par x^2 et ε par $+1$, on voit que les formules

$$x^2 = \frac{\mp 3y + n \pm 2}{3y \mp 2n + 1}, \qquad nx^2 = \frac{3y \pm 2n + 1}{3y \mp n - 2}, \qquad x^2 = \frac{\mp 3}{3y \mp n + 1}$$

transforment l'expression $\frac{dx}{\sqrt{(\mp 1 - x^2)(1 - nx^2)}}$ en $\frac{dy}{-\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$, où g_2, g_3, e_1, e_2, e_3 ont les déterminations que nous venons d'écrire et où les valeurs des radicaux $\sqrt{(\mp 1 - x^2)(1 - nx^2)}$, $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$ sont telles que leurs rapports soient respectivement

$$\frac{1}{2x}\frac{(x^2 \pm 1)^2}{n \pm 1}, \qquad \frac{(nx^2 - 1)^2}{2xn(1 \pm n)}, \qquad \mp \frac{1}{2}x^3.$$

En désignant par h un nombre positif et en posant $n = h^2$, on obtient, en particulier, les premières formules (CXXXV); K, K′ y représentent (CXIX$_6$) les quantités $\mathrm{X}(k^2)$, $\mathrm{X}'(k^2)$, où l'expression de k^2 au moyen de h est indiquée pour les diverses intégrales envisagées.

Si l'on remplace dans les mêmes formules z par x^2 et ε par -1, on voit que les formules

$$x^2 = -\frac{3y \mp n \pm 2}{3y \pm 2n \mp 1}, \quad nx^2 = \frac{-3y \pm 2n \mp 1}{-3y \pm n - 2}, \quad x^2 = \frac{\mp 3}{-3y \pm n - 1}$$

transforment l'expression $\frac{dx}{\sqrt{(\mp 1 + x^2)(1 - nx^2)}}$ en $\frac{-dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$, où g_2, g_3, e_1, e_2, e_3 sont déterminés par les mêmes relations pour $\varepsilon = -1$ et où les déterminations des radicaux $\sqrt{(\pm 1 + x^2)(1 - nx^2)}$, $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$ sont telles que leurs rapports soient respectivement

$$\mp\frac{1}{2x}\frac{(x^2 \mp 1)^2}{n \mp 1}, \qquad -\frac{(nx^2 - 1)^2}{2xn(1 \mp n)}, \qquad \pm\frac{1}{2}x^3.$$

En désignant par h un nombre positif et en posant $n = -h^2$, on obtient, en particulier, les dernières des formules (CXXXV).

602. Plaçons-nous maintenant dans le cas où une seule racine de Z est réelle; nous la désignerons par z_2; nous désignerons par z_1, z_3 les racines qui sont la première au-dessus, la seconde au-dessous de l'axe des quantités réelles, et nous nous bornerons à la seule substitution réelle, qui correspond évidemment à la supposition $\rho = 2$. Pour ce qui est de la fonction pu, on est dans le cas du n° 565; on doit donc supposer e_2 réel, e_1 et e_3 figurés par des points situés le premier au-dessus, le second au-dessous de

l'axe des quantités réelles. Le nombre Z'_2 est réel et positif; pour les valeurs réelles de y, z et y varient dans des sens contraires; la moitié supérieure de l'un des plans correspond à la moitié inférieure de l'autre. Aux points ∞, z_2, z_1, z_3 du plan des z, correspondent les points e_2, ∞, e_3, e_1 du plan des y. A la coupure qui va, dans le plan des y, sur l'axe des quantités réelles, de e_2 à $-\infty$, correspond, dans le plan des z, une coupure qui va de $-\infty$ à z_2, le bord supérieur de la coupure du plan des z correspondant au bord inférieur de la coupure du plan des y. Au cercle (e_2) du plan des y, de centre e_2 et passant par e_1, e_3 correspond, dans le plan des z, le cercle (z_2) de centre z_2 et passant par les points z_1, z_3; au point $y = m = e_2 + \left|\sqrt{e_2 - e_1}\sqrt{e_2 - e_3}\right|$ où, dans le plan des y, le cercle (e_2) rencontre, vers la droite, l'axe des quantités réelles, correspond, dans le plan des z, le point $z = \text{M} = z_2 + \left|\sqrt{z_2 - z_1}\sqrt{z_2 - z_3}\right|$ où le cercle (z_2) rencontre, aussi vers la droite, l'axe des quantités réelles. A la coupure rectiligne du plan des y qui va de m à e_2 correspond, dans le plan des z, la coupure rectiligne qui va de M à $+\infty$, le bord supérieur de la coupure du plan des z correspondant au bord inférieur de la coupure du plan des y. A la coupure circulaire du plan des y qui va de e_1 à e_3, en passant par m, correspond, dans le plan des z, la coupure circulaire qui va de z_3 à z_1 en passant par M; le bord intérieur de l'une des coupures correspond au bord extérieur de l'autre. Dans le plan des z ainsi coupé, $\sqrt{Z}$ est une fonction holomorphe de z; elle est positive pour des valeurs réelles de z un peu plus grandes que z_2. La figure (C) du Tableau (CXXXVI) met en évidence la correspondance directe entre la variable u et la variable z. Elle correspond au cas où l'on a $z_2 > \frac{1}{2}(z_1 + z_3)$ et où, par suite, e_2 est positif, en sorte que l'angle que font les deux vecteurs allant de o à ω_1 et à ω_3 est obtus. Dans tous les cas, les demi-côtés du rectangle (R) qui vont respectivement de o à $\omega_3 - \omega_1$ et à $\omega_1 - \omega_3$, ont leurs images sur les bords supérieur et inférieur de la coupure qui va de $-\infty$ à z_2; les côtés qui vont de $\omega_3 - \omega_1$ à $\frac{1}{2}(3\omega_3 - \omega_1)$ et de $\omega_1 - \omega_3$ à $\frac{1}{2}(3\omega_1 - \omega_3)$ ont leurs images sur les bords supérieur et inférieur de la coupure qui va de $+\infty$ à M; les quarts de côtés qui vont de $\frac{1}{2}(3\omega_3 - \omega_1)$ à ω_3 et de $\frac{1}{2}(3\omega_1 - \omega_3)$ à ω_1 ont pour images les bords extérieurs des coupures circulaires qui vont de M à z_1 et de M à z_3; le demi-côté qui va de ω_3 à ω_1 a

pour image le bord intérieur de la coupure circulaire qui va de z_1 à z_3. Les rectangles du plan des u désignés sur la figure par (r_1), (r_2), (r_3), (r_4) ont respectivement pour images les régions (r''_1), (r''_2), (r''_3), (r''_4) du plan des z. La démonstration des formules du Tableau (CXXXVI) n'offre dès lors aucune difficulté.

V. — Cas où A n'est pas nul.

603. Supposons maintenant que $Z = Az^4 + \ldots$ soit du quatrième degré. Plaçons-nous d'abord dans le cas où les quatre racines de Z sont réelles; les quatre substitutions possibles et les racines de Y sont alors réelles.

Nous supposerons $z_1 > z_2 > z_3 > z_4$; $e_1 > e_2 > e_3$. La relation générale

$$e_\beta - e_\gamma = \frac{A}{4}(z_\lambda - z_\rho)(z_\mu - z_\nu),$$

qu'il est aisé d'obtenir, permet de montrer que l'on a, quel que soit ρ, et en distinguant les deux suppositions $A \gtrless 0$,

$$A > 0, \quad e_1 - e_3 = \frac{A}{4}L, \quad e_1 - e_2 = \frac{A}{4}M, \quad e_2 - e_3 = \frac{A}{4}N, \quad k^2 = \frac{N}{L};$$

$$A < 0, \quad e_1 - e_3 = -\frac{A}{4}L, \quad e_1 - e_2 = -\frac{A}{4}N, \quad e_2 - e_3 = -\frac{A}{4}M, \quad k^2 = \frac{M}{L}.$$

On remarquera que l'expression qui représente k^2 pour $A \gtrless 0$, représente k'^2 pour $A \lessgtr 0$.

La correspondance détaillée des valeurs de z et de y est donnée dans le Tableau suivant, dont la description est trop analogue à celle du Tableau précédent (n° 600), pour que nous nous y arrêtions, non plus qu'à ce qui concerne le sens dans lequel y varie avec z, la correspondance des coupures, celle des moitiés inférieure ou supérieure des deux plans, le choix qu'il convient de faire parmi les valeurs de ρ, suivant les cas, en appliquant les formules ($\text{CXXXII}_{1,2,3}$), lorsqu'on ne considère que des valeurs réelles de z, ou enfin la déduction des formules (CXXXVII).

	$A > 0.$				$A < 0.$			
	$\rho=1.$	$\rho=2.$	$\rho=3.$	$\rho=4.$	$\rho=1.$	$\rho=2.$	$\rho=3.$	$\rho=4.$
$z=-\infty$	$\frac{1}{24}Z''_1$	$\frac{1}{24}Z''_2$	$\frac{1}{24}Z''_3$	$\frac{1}{24}Z''_4$	$\frac{1}{24}Z''_1$	$\frac{1}{24}Z''_2$	$\frac{1}{24}Z''_3$	$\frac{1}{24}Z''_4$
$z=z_4$	e_1	e_2	e_3	$\pm\infty$	e_3	e_2	e_1	$\mp\infty$
$z=z_3$	e_2	e_1	$\mp\infty$	e_3	e_2	e_3	$\pm\infty$	e_1
$z=z_2$	e_3	$\pm\infty$	e_1	e_2	e_1	$\mp\infty$	e_3	e_2
$z=z_1$	$\mp\infty$	e_3	e_2	e_1	$\pm\infty$	e_1	e_2	e_3
$z=+\infty$	$\frac{1}{24}Z''_1$	$\frac{1}{24}Z''_2$	$\frac{1}{24}Z''_3$	$\frac{1}{24}Z''_4$	$\frac{1}{24}Z''_1$	$\frac{1}{24}Z''_2$	$\frac{1}{24}Z''_3$	$\frac{1}{24}Z''_4$
Sgn Z'_ρ	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

604. Supposons que les quatre racines de Z soient imaginaires. Nous nous bornerons au cas où A est positif; nous désignerons par z_1 et z_4 les deux racines pour lesquelles le coefficient de i est positif, z_4 étant celle pour laquelle la partie réelle est la plus petite; z_2 et z_3 désigneront les racines conjuguées de z_1 et z_4. Toutes les substitutions sont imaginaires; mais il est aisé de voir que les racines e_1, e_2, e_3 sont réelles; nous supposerons toujours $e_1 > e_2 > e_3$. Nous choisirons la substitution qui correspond à la valeur 4 de ρ. Alors aux points z_1, z_2, z_3, z_4, ∞ du plan des z correspondent les points e_1, e_2, ∞, $s = \frac{1}{24}Z''_4$ du plan des y, et l'on a

$$e_1 - e_3 = \frac{A}{4}L, \qquad e_1 - e_2 = \frac{A}{4}M, \qquad e_2 - e_3 = \frac{A}{4}N, \qquad k^2 = \frac{N}{L}.$$

Les quatre points z_1, z_2, z_3, z_4 sont sur un cercle (c) dont nous désignerons le centre, situé sur l'axe des quantités réelles, par c, et les points d'intersection avec le même axe par P, Q; P est supposé à droite. Le cercle (c) correspond à l'axe des quantités réelles du plan des y. A l'axe des quantités réelles du plan des z correspond, dans le plan des y, un cercle par rapport auquel les points ∞ et e_3 doivent être symétriques, ainsi que les points e_1 et e_2; c'est donc le cercle (e_3) du n° 592; le point S est nécessairement sur la circonférence de ce cercle; soient p, q les points de rencontre de cette circonférence avec l'axe des quantités réelles; nous désignerons par p le point situé à droite (entre e_1 et e_2). Quand le point y

décrit (*fig.* A) l'axe des quantités réelles de $-\infty$ à $+\infty$ il passe successivement par les points $-\infty$, q, e_3, e_2, p, e_1, $+\infty$; le point correspondant z devra passer successivement par les points z_4, Q, z_3, z_2, P, z_1, z_4 du cercle (c) : il se mouvra dans le sens direct. Les points Q, P du plan des z correspondent respectivement aux points q, p du plan des y. Les régions du plan des z intérieure et extérieure au cercle (c) correspondent respectivement aux moitiés supérieure et inférieure du plan des y. Le point S du plan des y est donc sur la moitié inférieure du cercle (e_3). Aux portions de coupures du plan des y qui vont de $-\infty$ à e_3, de e_3 à e_2, de e_2 à e_1 correspondent, dans le plan des z, les coupures circulaires qui vont de z_4 à z_3, de z_3 à z_2, de z_2 à z_1; il n'y a pas de coupure entre z_4 et z_1. Le bord intérieur de la coupure circulaire du plan des z correspond au bord supérieur de la coupure rectiligne du plan des y. Pour définir $\sqrt{Z}$ au moyen de $\sqrt{Y}$, il est commode d'avoir l'argument trigonométrique du facteur $\dfrac{Z'_4}{4(z-z_4)^2}$ qui figure dans la formule (CXXXII_2); des considérations faciles de Géométrie élémentaire fournissent la règle suivante : soit A le second point d'intersection avec le cercle (c) de la droite qui joint z_4 à z; soit B le second point d'intersection de ce même cercle et de la parallèle menée par A à l'axe des quantités réelles : l'argument cherché est mesuré, en prenant pour unité le rayon du cercle (c), par l'arc qui va du point le plus haut de ce cercle au point B. On en conclut que la fonction $\sqrt{Z}$, holomorphe dans le plan des z coupé, est positive pour z réel compris entre P et Q, négative pour les autres valeurs réelles de z.

La figure (D) du Tableau (CXXXVIII) indique la correspondance entre les variables z et u. Le périmètre du rectangle (R) du n° 591 fait son image sur les coupures, les segments rectilignes qui vont de $\frac{1}{2}\omega_3$ à $\omega_1+\frac{1}{2}\omega_3$ et de $-\frac{1}{2}\omega_3$ à $\omega_1-\frac{1}{2}\omega_3$ ont leurs images sur la moitié inférieure et la moitié supérieure de la circonférence du cercle (e_3); au point $S=\frac{1}{24}Z''_4$ du plan des y correspond, dans le plan des z, le point ∞, et, dans le plan des u, un point u_0 situé sur le segment qui va de ω_3 à $\omega_1+\frac{1}{2}\omega_3$; le segment qui va de $\frac{1}{2}\omega_3$ à u_0 a pour image, dans le plan des z, la portion de l'axe des quantités réelles qui va de Q à $-\infty$; le segment qui va de u_0 à $\omega_1+\frac{1}{2}\omega_3$ a pour image la portion de l'axe des quantités

réelles qui va de $+\infty$ à P; enfin le segment qui va de $-\frac{1}{2}\omega_3$ à $\omega_1-\frac{1}{2}\omega_3$ a pour image la portion de l'axe des quantités réelles qui va de Q à P. Enfin, on a indiqué sur la figure par les signes (r''_1), (r''_2), (r''_3), (r''_4) les régions du plan des z où se font les images des petits rectangles (r_1), (r_2), (r_3), (r_4). Ces explications suffiront au lecteur, pour établir les formules (CXXXVIII) et pour reconnaître en particulier comment on obtient les valeurs (réelles) des intégrales de la forme $\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$, quand z est réel et varie entre des limites convenables. Au surplus, une autre méthode permettra bientôt d'obtenir ces intégrales, sans l'introduction de quantités imaginaires. Dans le cas où Z est bicarré et où, regardé comme un trinome du second degré en z^2, il a ses racines imaginaires, les quatre points z_1, z_2, z_3, z_4 du plan des z sont les sommets d'un rectangle; le point c coïncide avec le point o; dans le plan des y, le point S est à l'intersection du cercle (e_3) et de la parallèle menée par le point e_2 à l'axe des imaginaires vers le bas.

605. Les résultats précédents doivent être modifiés quand le cercle (c) devient une droite, c'est-à-dire quand les quatre racines z_1, z_2, z_3, z_4 ont même partie réelle. Cette droite (c) est perpendiculaire [*fig.* (E)] à l'axe des quantités réelles qu'elle rencontre en un point P. On prend alors pour z_4 celle des quatre racines qui, sur la droite (c), est figurée par le point le plus haut; en descendant sur cette droite on rencontre les points z_1, P, z_2, z_3 et l'on emploie la même substitution; la correspondance entre les racines z_1, z_2, z_3 de Z et e_1, e_2, e_3 de Y subsiste. Les coupures du plan des z vont, sur la droite (c), du point z_4 au point à l'infini I vers le haut, puis de z_1 au point à l'infini J vers le bas. Le point $\frac{1}{2}\omega_3$ a son image au point ∞ du plan des z, point avec lequel les points I, J et les points $\pm\infty$ de l'axe des quantités réelles doivent être regardés comme confondus. Les petits rectangles (r_1), (r_2), (r_3), (r_4) ont leurs images dans les quatre angles formés par l'axe des quantités réelles et la droite (c). Dès lors les applications ne comportent pas de difficulté, et l'on obtient en particulier les formules (CXXXVIII$_3$).

606. Lorsque le polynome Z a deux racines imaginaires conjuguées et deux réelles, nous désignerons par z_2 et z_4 les deux ra-

cines réelles, en supposant $z_2 > z_4$; par z_1 la racine imaginaire dans laquelle le coefficient de i est positif, par z_3 sa conjuguée. Nous supposerons ρ égal à 2 ou à 4 pour avoir affaire à une substitution réelle. Le polynome Y aura une racine réelle e_2 et deux racines imaginaires e_1, e_3; on suppose que $\frac{e_1 - e_3}{i}$ est positif. On trouve aisément les résultats suivants :

$$\mathrm{A} > 0, \quad e_1 - e_3 = \frac{\mathrm{A}}{4}\mathrm{L}, \quad e_1 - e_2 = \frac{\mathrm{A}}{4}\mathrm{M}, \quad e_2 - e_3 = \frac{\mathrm{A}}{4}\mathrm{N}, \quad k^2 = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{L}};$$

$$\mathrm{A} < 0, \quad e_1 - e_3 = -\frac{\mathrm{A}}{4}\mathrm{L}, \quad e_1 - e_2 = -\frac{\mathrm{A}}{4}\mathrm{N}, \quad e_2 - e_3 = -\frac{\mathrm{A}}{4}\mathrm{M}, \quad k^2 = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}.$$

Z'_2 est du signe de A, Z'_4 de signe contraire; on en conclut d'une part la détermination de $\sqrt{Z}$ correspondant à celle de $\sqrt{Y}$, puis, d'autre part, ce fait que pour des valeurs correspondantes réelles de z et de y, y varie dans le même sens que z, pour $A > 0$, $\rho = 4$ et $A < 0$, $\rho = 2$; dans le sens contraire pour $A > 0$, $\rho = 2$ et $A < 0$, $\rho = 4$. Suivant que y et z, supposés réels, varient, ou non, dans le même sens, les parties supérieures (ou inférieures) des deux plans des y et des z se correspondent, ou non. Dans le premier cas z_1, z_3 correspondent à e_1, e_3; dans le second, z_1, z_3 correspondent à e_3, e_1.

Au cercle (e_2) du plan des y, cercle qui a pour centre e_2 et qui passe par e_1, e_3, correspond dans le plan des z un cercle (c) passant par z_1, z_3 et par rapport auquel sont symétriques les points z_2, z_4 correspondants des points e_2, ∞ (ou ∞, e_2) du plan des y. Il y a lieu de distinguer trois cas, suivant que le rapport $\delta = \left|\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4}\right|$ est plus grand que un, plus petit que un, égal à un. Dans le premier cas c'est le point z_4, et dans le second le point z_2 qui est intérieur à (c). Ces points correspondent, dans un certain ordre qui dépend de la valeur de ρ, aux points ∞ et e_2 du plan des y, et l'examen de cette correspondance permet de reconnaître, dans les différents cas possibles, si les régions intérieures (ou extérieures) des deux cercles (c) et (e_2) se correspondent ou non. Les régions de même nom se correspondent pour $\rho = 2$, $\delta > 1$ et $\rho = 4$, $\delta < 1$; elles ne se correspondent pas pour $\rho = 2$, $\delta < 1$, ni pour $\rho = 4$, $\delta > 1$. En combinant ces renseignements avec ceux que l'on a sur le sens dans lequel varie y quand z augmente,

par valeurs réelles, de $-\infty$ à $+\infty$, on reconnaît aisément comment sont disposés, dans le plan des z, les points d'intersection M, M' du cercle (c) avec l'axe des quantités réelles qui correspondent respectivement aux points m et m' du cercle (e_2) situés sur l'axe des quantités réelles, et comment, dans le plan des y, est situé le point S qui correspond au point ∞ du plan des z. On a d'ailleurs

$$\text{M} = \frac{z_2 \mp \delta z_4}{1 \mp \delta}, \qquad \text{M}' = \frac{z_2 \pm \delta z_4}{1 \pm \delta},$$

où il faut prendre les signes supérieurs ou les signes inférieurs, suivant que l'on a $A \gtrless 0$. Dans le troisième cas où δ est égal à 1, le cercle (c) se réduit à la droite qui passe par les points z_1, z_3. Le milieu des points z_2, z_4 est alors le point M' ou le point M; et le point S coïncide avec l'un des points m, m'. Voici le résumé de ces divers renseignements :

Suivant que l'on a $\rho = 2$ ou $\rho = 4$, on a $\operatorname{sgn}\frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{Z}} = \pm \operatorname{sgn} A$ et les valeurs e_2, ∞ ou ∞, e_2 de y correspondent aux valeurs z_4, z_2 de z. Suivant que l'on a $\operatorname{sgn}\frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{Z}} = \mp 1$, y et z varient, ou non, dans le même sens. Le Tableau suivant indique, selon les cas, comment sont rangées les quantités z_2, z_4, M, M' ou m, m', e_2, S.

$$A > 0 \begin{cases} \delta < 1, & z_4 < \text{M}' < z_2 < \text{M}; \\ \delta > 1, & \text{M} < z_4 < \text{M}' < z_2; \end{cases}$$

$$A < 0 \begin{cases} \delta < 1, & z_4 < \text{M} < z_2 < \text{M}'; \\ \delta > 1, & \text{M}' < z_4 < \text{M} < z_2. \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \rho = 2,\ \delta < 1 \\ \text{ou} \\ \rho = 4,\ \delta > 1 \end{matrix}\right\} \begin{cases} A > 0, & m' < e_2 < \text{S} < m. \\ A < 0, & m' < \text{S} < e_2 < m; \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \rho = 2,\ \delta > 1 \\ \text{ou} \\ \rho = 4,\ \delta < 1 \end{matrix}\right\} \begin{cases} A > 0, & m' < e_2 < m < \text{S}, \\ A < 0, & \text{S} < m' < e_2 < m. \end{cases}$$

$$A > 0, \qquad \delta = 1, \qquad \text{M}' = \frac{z_2 + z_4}{2}, \qquad \text{S} = m;$$

$$A < 0, \qquad \delta = 1, \qquad \text{M} = \frac{z_2 + z_4}{2}, \qquad \text{S} = m'.$$

En combinant les résultats indiqués par ce Tableau à ceux que

l'on trouve sur la figure (B) du Tableau (CXXXI), on obtient immédiatement la correspondance entre les variables z et u. Le périmètre du rectangle (R) du n° 595 fait son image sur les coupures du plan des z.

Il n'y a plus maintenant aucune difficulté à établir les formules (CXXXIX).

VI. — Réduction à la forme de Legendre.

607. On peut, ainsi que Legendre l'a remarqué, ramener une expression différentielle $\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$, où l'on suppose le polynome $R(z) = A(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$ du quatrième degré, à racines inégales, au type $\frac{dv}{\sqrt{V}}$, où V est un polynome du second degré en v^2, au moyen d'une substitution linéaire $z = \frac{p+qv}{1+v}$, dans laquelle p et q ont des valeurs convenablement choisies. Quels que soient p et q on a, en effet,

$$\frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{(q-p)\,dv}{\sqrt{A[p-z_1+(q-z_1)v][p-z_2+(q-z_2)v][p-z_3+(q-z_3)v][p-z_4+(q-z_4)v]}};$$

en égalant à zéro le coefficient de v dans le produit des deux premiers facteurs sous le radical, ainsi que dans le produit des deux derniers facteurs, ce qui détermine p et q par les conditions

$$\frac{p+q}{2} = \frac{z_1 z_2 - z_3 z_4}{z_1 - z_3 + z_2 - z_4},$$

$$\left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \frac{(z_1-z_3)(z_1-z_4)(z_2-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_3+z_2-z_4)^2},$$

le second membre de l'égalité précédente se réduit à une expression de la forme

$$\frac{\alpha\,dv}{\sqrt{\pm(1\pm a^2v^2)(1\pm b^2v^2)}},$$

où α désigne une constante qu'il est aisé d'évaluer au moyen de

A, z_1, z_2, z_3, z_4. Lorsque les coefficients du polynome donné $R(z)$ sont réels, cette constante α, ainsi que les valeurs de p et de q sont manifestement réelles; dans ce cas a et b désigneront des nombres réels et positifs : on supposera $a < b$.

Le seul cas où p et q ne seraient pas déterminés par les formules précédentes serait celui où l'on aurait $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$; mais alors on n'a certainement pas $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$; il suffira donc de transposer, dans l'égalité précédente qui a lieu quels que soient p et q, le second et le troisième facteur sous le radical, après quoi la réduction au type $\frac{dv}{\sqrt{V}}$ se fera comme on vient de l'indiquer.

608. Si, dans l'expression $\frac{dv}{\sqrt{V}}$, où $V = \pm(1 \pm a^2 v^2)(1 \pm b^2 v^2)$, l'on fait

$$a = bc, \qquad bv = x,$$

on retombe sur l'un des types envisagés au n° 601, et il suffirait de se reporter à ce numéro pour y trouver les substitutions linéaires en x^2, qui ramènent l'expression obtenue à une expression de la forme

$$\frac{dy}{-\sqrt{4(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}},$$

où $e_1 + e_2 + e_3 = 0$. Mais, au lieu de ces substitutions, il est souvent commode, quand a et b sont réels, et, par suite, c compris entre 0 et 1, de se servir des substitutions du premier degré en x^2 et w^2 données par Legendre dans les divers cas qui peuvent se présenter lorsqu'on combine de toutes les manières possibles les signes $+$, $-$ qui figurent sous le radical, substitutions qui permettent de ramener l'expression $\frac{dv}{\sqrt{V}}$ à une expression de la forme $\frac{dw}{\sqrt{W}}$, où $W = (1 - w^2)(1 - k^2 w^2)$, k étant un nombre réel compris entre 0 et 1.

Nous supposons dans les formules qui suivent x et w réels, c positif ainsi que $k' = \sqrt{1 - k^2}$; w ne doit prendre que les valeurs comprises entre -1 et $+1$; pour chacune des transformations, x est par conséquent supposé compris entre les limites qui résultent de cette hypothèse, en vertu de la formule même de transformation; dans ces conditions les quantités sous le radical

sont positives. Les radicaux eux-mêmes sont supposés positifs; enfin ε, ε' désignent des quantités égales à ± 1, ayant respectivement les signes de x et de ϖ.

$$x = \frac{\varpi}{\sqrt{1-\varpi^2}}, \qquad k = \sqrt{1-c^2}, \qquad \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+c^2x^2)}} = \frac{d\varpi}{\sqrt{W}},$$

$$x = \varepsilon\sqrt{1-\varpi^2}, \qquad k = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \qquad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+c^2x^2)}} = -\varepsilon\varepsilon' k' \frac{d\varpi}{\sqrt{W}},$$

$$x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varpi^2}}, \qquad k = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}, \qquad \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1+c^2x^2)}} = \varepsilon\varepsilon' k \frac{d\varpi}{\sqrt{W}},$$

$$x = \frac{\varepsilon\sqrt{1-\varpi^2}}{c}, \qquad k = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}, \qquad \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)(1-c^2x^2)}} = -\varepsilon\varepsilon' k \frac{d\varpi}{\sqrt{W}},$$

$$x = \frac{\varepsilon}{c\sqrt{1-\varpi^2}}, \qquad k = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \qquad \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)(c^2x^2-1)}} = \varepsilon\varepsilon' k' \frac{d\varpi}{\sqrt{W}},$$

$$x = \frac{\varepsilon\sqrt{1-(1-c^2)\varpi^2}}{c}, \qquad k = \sqrt{1-c^2}, \qquad \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-c^2x^2)}} = -\varepsilon\varepsilon' \frac{d\varpi}{\sqrt{W}}.$$

A ces transformations, il convient d'adjoindre les deux suivantes qui sont linéaires : les radicaux sont toujours supposés positifs.

$$\sqrt{c}\,x = \frac{1+\varpi+\sqrt{c}\,(1-\varpi)}{1-\varpi+\sqrt{c}\,(1+\varpi)}, \qquad k = \left(\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right)^2,$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-c^2x^2)}} = \frac{(1+\sqrt{k})^2}{2}\,\frac{d\varpi}{\sqrt{W}},$$

$$cx = \varpi, \qquad k = c, \qquad \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(c^2x^2-1)}} = -\frac{d\varpi}{\sqrt{W}}.$$

Il est aisé de déduire à nouveau, de ces relations différentielles, les valeurs des intégrales qui figurent dans le Tableau (CXXXV).

609. Lorsque les racines de z sont réelles, si l'on fait, dans l'expression $\frac{dz}{\sqrt{Z}}$, la substitution

$$z = \frac{z_\lambda(z_\rho - z_\mu)\cos^2\varphi + z_\rho(z_\lambda - z_\mu)\sin^2\varphi}{(z_\rho - z_\mu)\cos^2\varphi + (z_\lambda - z_\mu)\sin^2\varphi},$$

$$dz = -\frac{2(z_\lambda - z_\mu)(z_\rho - z_\mu)(z_\lambda - z_\rho)\sin\varphi\cos\varphi}{[(z_\rho - z_\mu)\cos^2\varphi + (z_\lambda - z_\mu)\sin^2\varphi]^2}\,d\varphi.$$

on trouve

$$\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{-2\,d\varphi}{\sqrt{A[(z_\lambda - z_\nu)(z_\mu - z_\rho)\cos^2\varphi + (z_\rho - z_\nu)(z_\mu - z_\lambda)\sin^2\varphi]}}.$$

Supposons d'abord A positif. Si z est compris entre z_1 et $+\infty$, ou entre $-\infty$ et z_4, on supposera $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\nu = 3$, $\rho = 4$; quand z varie de z_1 à $+\infty$ ou de $-\infty$ à z_4, φ varie de o à φ_0 ou de φ_0 à $\frac{\pi}{2}$, en désignant par φ_0 l'arc compris entre o et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente est égale à $\left|\sqrt{\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_3}}\right|$. Si z est compris entre z_3 et z_2, on prendra $\lambda = 3$, $\mu = 4$, $\nu = 1$, $\rho = 2$; quand z varie de z_3 à z_2, φ varie de o à $\frac{\pi}{2}$. En donnant aux radicaux leur signification arithmétique, on aura

$$\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{2}{\sqrt{AL}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \qquad k^2 = \frac{N}{L}.$$

Supposons ensuite A négatif. Si z est compris entre z_4 et z_3, on prendra $\lambda = 4$, $\mu = 1$, $\nu = 2$, $\rho = 3$; quand z varie de z_4 à z_3, φ varie de o à $\frac{\pi}{2}$. Si z est compris entre z_2 et z_1, on prendra $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $\nu = 4$, $\rho = 1$; quand z varie de z_2 à z_1, φ varie de o à $\frac{\pi}{2}$. En donnant encore aux radicaux leur signification arithmétique, on aura

$$\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{2}{\sqrt{-AL}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \qquad k^2 = \frac{M}{L}.$$

Il est aisé de déduire à nouveau de ces relations différentielles les valeurs des intégrales qui figurent dans le Tableau (CXXXV).

VII. — Substitution quadratique.

610. Nous allons montrer maintenant comment la réduction à la forme normale $\frac{dy}{-\sqrt{Y}}$ de toutes les différentielles de la forme $\frac{dz}{\sqrt{Z}}$, où Z est un polynome quelconque en z, du troisième ou du quatrième degré, peut s'effectuer au moyen d'une substitution du

second degré. Nous nous bornerons au cas où le polynome Z a ses coefficients réels et admet au moins deux racines imaginaires; l'intérêt de cette dernière supposition consiste en ce que l'on peut alors choisir une substitution réelle telle que les racines du polynome transformé soient aussi réelles, ce que l'on ne peut faire par une substitution linéaire. Les modifications qu'il y aurait à apporter à quelques-uns des résultats suivants, si l'on ne se trouvait pas dans le cas auquel nous nous limitons, n'échapperont pas au lecteur.

Rappelons d'abord quelques propositions élémentaires relatives à la fraction $x = \frac{U}{V}$, où $U = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$, $V = \alpha' z^2 + \beta' z + \gamma'$ sont des trinomes du second degré en z, à coefficients réels; nous n'excluons pas le cas où α' est nul. La dérivée de cette fraction s'annule pour les racines ζ_1, ζ_3 de l'équation du second degré en z,

$$(a)\quad \varphi(z) = U'V - UV' = (\alpha\beta' - \alpha'\beta) z^2 + 2(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) z + \beta\gamma' - \beta'\gamma = 0.$$

Les valeurs x_1, x_3 de x qui correspondent à ζ_1, ζ_3 s'obtiennent en remplaçant z par ζ_1, ζ_3 dans $\frac{U}{V}$, ou mieux dans la fraction du premier degré $\frac{U'}{V'}$; x_1, x_3 sont réels en même temps que ζ_1, ζ_3. Quand x est égal à x_1 ou à x_3, le polynome en z, $U - Vx$, ayant une racine commune avec sa dérivée, est un carré parfait et est, par suite, égal à $(\alpha - \alpha' x_1)(z - \zeta_1)^2$ ou à $(\alpha - \alpha' x_3)(z - \zeta_3)^2$. On en conclut que x_1, x_3 sont les racines de l'équation en x

$$(b)\qquad \psi(x) = (\beta' x - \beta)^2 - 4(\alpha' x - \alpha)(\gamma' x - \gamma) = 0,$$

qui exprime que l'équation en z, $U - Vx = 0$, a ses racines égales. Des remarques antérieures et des relations

$$\psi(x) = (\beta'^2 - 4\alpha'\gamma')(x - x_1)(x - x_3),$$
$$\varphi(z) = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)(z - \zeta_1)(z - \zeta_3),$$

il résulte que le polynome en z, $V^2\psi\left(\frac{U}{V}\right)$, est égal au carré de $\varphi(z)$ multiplié par un facteur constant que l'on trouve aisément être égal à 1 en comparant les coefficients de z^4; on a donc l'identité

$$(c)\qquad V^2\psi\left(\frac{U}{V}\right) = \varphi^2(z) = (\beta'^2 - 4\alpha'\gamma')(U - Vx_1)(U - Vx_3).$$

Quand les racines de V sont imaginaires, la réalité des quantités ζ_1, ζ_3, x_1, x_3 apparaît aisément sur les équations (a), (b). En effet, d'une part, en remplaçant, dans $\varphi(z) = U'V - UV'$, z par la racine $-\frac{\beta'}{2\alpha'}$ de V', on trouve le même résultat qu'en faisant la même substitution dans $U'V$; or V est alors du même signe que α'; U' se réduit à $\frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha'}$; $U'V$ est donc de même signe que $\alpha'\beta - \alpha\beta'$, c'est-à-dire de signe contraire au coefficient de z^2 dans $\varphi(z)$; ζ_1 et ζ_3 sont donc réels et comprennent entre eux le nombre $-\frac{\beta'}{2\alpha'}$. D'autre part, si dans $\psi(x)$ on remplace x soit par $\frac{\alpha}{\alpha'}$ soit par $\frac{\gamma}{\gamma'}$ le résultat est positif, par conséquent de signe contraire au coefficient de x^2 dans $\psi(x)$; x_1, x_3 sont donc réels et comprennent entre eux $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$. Enfin, comme x_1 et x_3 se déduisent de ζ_1, ζ_3 en remplaçant z par ζ_1, ζ_3 dans $\frac{2\alpha z + \beta}{2\alpha' z + \beta'}$, on a

$$x_1 - x_3 = \frac{2(\alpha\beta' - \alpha'\beta)(\zeta_1 - \zeta_3)}{(2\alpha'\zeta_1 + \beta')(2\alpha'\zeta_3 + \beta')};$$

puisque $-\frac{\beta'}{2\alpha'}$ est compris entre ζ_1 et ζ_3 le dénominateur est négatif; il en résulte que ζ_1, ζ_3 sont rangés, ou non, dans le même ordre de grandeur que x_1, x_3, suivant que $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ est négatif ou positif.

Dans le cas que nous aurons encore à examiner, où U a ses racines imaginaires et où α' est nul, on voit de même que ζ_1, ζ_3 sont réels et comprennent la racine $-\frac{\gamma'}{\beta'}$ de V; que x_1, x_3 sont de signes contraires, parce que leur produit est négatif; enfin que ζ_1, ζ_3 sont rangés, ou non, dans le même ordre de grandeur que x_1, x_3, suivant que $\alpha\beta'$ est positif ou négatif.

611. Ceci posé, désignons par Z un polynome du troisième ou du quatrième degré, à coefficients réels, admettant deux racines imaginaires conjuguées z_1, z_3; nous désignerons par z_2, z_4 les deux autres racines (réelles ou imaginaires conjuguées) si Z est du quatrième degré, par z_2 la racine réelle unique si Z est du troisième degré, en sorte que, en désignant par A, a des constantes,

Z sera, suivant les cas, de l'une ou de l'autre des deux formes

$$A(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4), \qquad a(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3).$$

Dans la différentielle $\frac{dz}{\sqrt{Z}}$, nous ferons la substitution $x=\frac{U}{V}$, en posant

$$U=(z-z_2)(z-z_4), \qquad V=(z-z_1)(z-z_3),$$

si Z est du quatrième degré;

$$U=(z-z_1)(z-z_3), \qquad V=z-z_2,$$

si Z est du troisième; les coefficients $\alpha, \ldots, \gamma'$ de U, V sont réels et s'expriment immédiatement au moyen des racines de Z. On aura alors, en convenant de remplacer A par a quand Z est du troisième degré,

$$Z=AUV=AV^2x, \qquad \frac{dx}{dz}=\frac{\varphi(z)}{V^2},$$

d'où, à cause de l'identité (c),

$$\text{(CXL)} \qquad \frac{dz}{\sqrt{Z}}=\frac{V\,dx}{\varphi(z)\sqrt{Ax}}=\frac{dx}{\sqrt{Ax\,\psi(x)}},$$

les radicaux étant liés par la relation

$$\frac{\sqrt{Ax\,\psi(x)}}{\sqrt{Z}}=\frac{\varphi(z)}{V^2},$$

qui montre, en supposant tout réel, que les radicaux sont ou non de même signe, suivant que $\varphi(z)$ est positif ou négatif. La même égalité montre que Z et $Ax\,\psi(x)$ sont de même signe pour des valeurs correspondantes de x et de z.

612. Plaçons-nous d'abord dans le cas, où Z étant du troisième degré, U a ses racines imaginaires; ζ_1 et ζ_3 sont alors réels; en supposant $\zeta_1>\zeta_3$, on aura, par les remarques précédentes,

$$\varphi(z)=z^2-2z_2z+z_2(z_1+z_3)-z_1z_3=(z-\zeta_1)(\zeta-\zeta_3),$$

$$\psi(x)=(x+z_1+z_3)^2-4(z_1z_3+z_2x)=(x-x_1)(x-x_3),$$

$$x_1=2\zeta_1-z_1-z_3, \qquad x_3=2\zeta_3-z_1-z_3,$$

$$\zeta_1>z_2>\zeta_3, \qquad x_1>0>x_3.$$

Pour que $\sqrt{Z}$ soit réel, z doit être compris entre $-\infty$ et z_2 ou entre z_2 et $+\infty$, suivant que a est négatif ou positif. Le Tableau suivant indique la correspondance entre les valeurs de z et celles de x; dans la première ligne les valeurs de z sont rangées par ordre de grandeur croissante; la troisième ligne contient le signe de $\varphi(z)$; x augmente ou diminue quand z croît, suivant que ce signe est $+$ ou $-$; x_3 est un maximum, x_1 un minimum :

z	$-\infty$		ζ_3		z_2		ζ_1		$+\infty$
x	$-\infty$		x_3		$\mp\infty$		x_1		$+\infty$
Signe de $\varphi(z)$		$+$		$-$		$-$		$+$	

Dans l'égalité $\dfrac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \pm\dfrac{dx}{|\sqrt{ax(x-x_1)(x-x_3)}|}$, on prendra donc le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que z n'est pas ou est compris entre ζ_3 et ζ_1.

En appliquant par exemple le résultat à la différentielle $\dfrac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}$, où l'on suppose e_2 réel, e_1, e_3 imaginaires conjuguées, en sorte que, comme on l'a fait observer au n° 594, $\sqrt{e_2-e_1}$, $\sqrt{e_2-e_3}$ sont aussi imaginaires conjuguées, on est amené à faire la substitution $x = \dfrac{z^2+e_2z+e_1e_3}{z-e_2}$, et les quantités désignées plus haut par ζ_1, ζ_3, x_1, x_3 sont ici

$$\zeta_1 = e_2+\sqrt{e_2-e_1}\sqrt{e_2-e_3},$$
$$\zeta_3 = e_2-\sqrt{e_2-e_1}\sqrt{e_2-e_3},$$
$$x_1 = 2\zeta_1+e_2,$$
$$x_3 = 2\zeta_3+e_2.$$

Au lieu de cette substitution, afin d'obtenir un polynome dans lequel la somme des racines soit nulle, faisant la substitution

$$y = x-2e_2 = z+\frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{z-e_2} = z+\frac{2g_2-\dfrac{3g_3}{e_2}}{z-e_2},$$

nous obtiendrons la relation

$$(d)\qquad \frac{dz}{|\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}|} = \pm\frac{dy}{|\sqrt{4(y-\mathrm{E}_1)(y-\mathrm{E}_2)(y-\mathrm{E}_3)}|},$$

en posant

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_1 &= e_2 + 2\sqrt{e_2 - e_1}\sqrt{e_2 - e_3} = e_2 + 4\left(e_2^2 + \frac{g_3}{8e_2}\right),\\
\mathrm{E}_2 &= -2e_2,\\
\mathrm{E}_3 &= e_2 - 2\sqrt{e_2 - e_1}\sqrt{e_2 - e_3} = e_2 - 4\left(e_2^2 + \frac{g_3}{8e_2}\right).
\end{aligned}
$$

Il importe de remarquer que les quantités E_1, E_2, E_3 sont réelles. En supposant $z > e_2$, on aura $x > x_1$, donc $y > \mathrm{E}_1$, et l'on devra prendre, dans le second membre de l'équation (d), le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que z est compris entre ζ_1 et $+\infty$, ou entre e_2 et ζ_1; si z doit varier à la fois dans les deux intervalles, on fractionnera l'intégrale.

Le résultat que nous obtenons ainsi coïncide avec la relation

$$
p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_3 + \omega_1}{2}, \frac{\omega_3 - \omega_1}{2}\right) = p(u \mid \omega_1, \omega_3) + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{p(u \mid \omega_1, \omega_3) - e_2},
$$

qui résulte aisément des formules (XXII) ou (XXIV) et des formules de transformation linéaire.

613. Supposons maintenant que Z soit du quatrième degré, on aura alors

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) &= (2z - z_2 - z_4)(z - z_1)(z - z_3) - (2z - z_1 - z_3)(z - z_2)(z - z_4)\\
&= (z_2 + z_4 - z_1 - z_3)z^2 - 2(z_2 z_4 - z_1 z_3)z\\
&\qquad\qquad + (z_1 + z_3) z_2 z_4 - (z_2 + z_4) z_1 z_3\\
&= (z_2 + z_4 - z_1 - z_3)(z - \zeta_1)(z - \zeta_3),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= [z_2 + z_4 - (z_1 + z_3)x]^2 - 4(x - 1)(z_1 z_3 x - z_2 z_4)\\
&= (z_1 - z_3)^2 x^2 + 2[2z_2 z_4 + 2z_1 z_3 - (z_2 + z_4)(z_1 + z_3)]x + (z_2 - z_4)^2\\
&= (z_1 - z_3)^2 (x - x_1)(x - x_3),
\end{aligned}
$$

$$
x_1 = \frac{2\zeta_1 - z_2 - z_4}{2\zeta_1 - z_1 - z_3}, \qquad x_3 = \frac{2\zeta_3 - z_2 - z_4}{2\zeta_3 - z_1 - z_3},
$$

$$
x_1 - x_3 = \frac{2(z_2 + z_4 - z_1 - z_3)(\zeta_1 - \zeta_3)}{(2\zeta_1 - z_1 - z_3)(2\zeta_3 - z_1 - z_3)};
$$

puis, en posant $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}(z_1 - z_3)^2$,

$$
\text{(CXLI)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}} = \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{A}_1 x(x - x_1)(x - x_3)}},\\
&\frac{\sqrt{\mathrm{A}_1 x(x - x_1)(x - x_3)}}{\sqrt{\mathrm{Z}}} = \frac{\varphi(z)}{(z - z_1)^2 (z - z_3)^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Il faut toutefois remarquer que celles de ces formules où figurent ζ_1, ζ_3 doivent être modifiées si $\varphi(z)$ se réduit au premier degré, c'est-à-dire si $z_2 + z_4 - z_1 - z_3$ est nul; nous écartons ce cas provisoirement. Les quantités ζ_1, ζ_3, x_1, x_3 sont réelles; $\frac{z_1 + z_3}{2}$ est compris entre ζ_1 et ζ_3, 1 et $\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$ sont compris entre x_1 et x_3. Si z_2 et z_4 sont réels, x_1 et x_3 sont de signes contraires; d'ailleurs $\varphi(z_2)$ et $\varphi(z_4)$ sont de signes contraires; il y a donc une des racines ζ_1 et ζ_3 comprise entre z_2 et z_4. Si z_2 et z_4 sont imaginaires, x_1 et x_3, qui sont de même signe, sont positifs, puisque l'un de ces nombres est plus grand que 1; nous prendrons pour x_1 le plus grand des deux; A_1 est de signe contraire à A. Nous avons tout ce qu'il faut pour dresser le Tableau suivant, comportant deux cas suivant le signe de $z_2 + z_4 - z_1 - z_3$; dans chaque cas la première ligne contient les valeurs remarquables de z rangées par ordre de grandeur croissante; la dernière ligne contient les signes de $\varphi(z)$ dans chaque intervalle; suivant que ce signe est $+$ ou $-$, x regardé comme une fonction de z est une fonction croissante ou décroissante. Enfin, on a fait figurer z_2 et z_4 parmi les valeurs remarquables de z en choisissant $z_2 < z_4$. Ces quantités, ainsi que les valeurs zéro de x qui leur correspondent, doivent être effacées si elles sont imaginaires.

$z_2 + z_4 > z_1 + z_3$; $(\zeta_1 < \zeta_3)$.

z	$-\infty$		ζ_1		z_2		ζ_3		z_4		$+\infty$
x	1		x_1		0		x_3		0		1
Signe de $\varphi(z)$		$+$		$-$		$-$		$+$		$+$	

$z_0 + z_2 < z_1 + z_3$; $(\zeta_1 > \zeta_3)$.

z	$-\infty$		z_2		ζ_3		z_4		ζ_1		$+\infty$
x	1		0		x_3		0		x_1		1
Signe de $\varphi(z)$		$-$		$-$		$+$		$+$		$-$	

Lorsque z_2 et z_4 sont réels, A peut être positif ou négatif; dans le premier cas, z doit être compris entre $-\infty$ et z_2 ou entre z_4 et $+\infty$; dans le second cas, entre z_2 et z_4. Si l'on a, par exemple, $z_2 + z_4 > z_1 + z_3$, $A > 0$, $z < z_2$, x est positif et plus petit que x_1; d'ailleurs A_1 est négatif; la quantité $A_1(x - x_1)(x - x_3)$ est positive. Les deux radicaux doivent être pris avec le même

signe tant que z reste compris entre $-\infty$ et ζ_1, avec des signes contraires tant que z est compris entre ζ_1 et z_2; si z traverse la valeur ζ_1, le chemin d'intégration devra être fractionné de la limite inférieure à ζ_1, de ζ_1 à la limite supérieure. Le Tableau précédent permettra dans tous les cas de supprimer toute ambiguïté.

Si z_2, z_4 sont imaginaires, A doit être supposé positif, donc A_1 négatif. On reconnaît sans peine que x doit être compris entre x_1 et x_3, et le Tableau permet toujours de lever l'ambiguïté de signe.

Il reste à examiner le cas où l'on a $z_2+z_4=z_1+z_3$. L'équation (a) se réduit alors à

$$\varphi(z)=2(z_1z_3-z_2z_4)\left(z-\frac{z_1+z_3}{2}\right).$$

La formule (CXLI) subsiste; mais il convient de remarquer que l'une des racines x_1, x_3 est égale à 1 et que l'autre est égale à $\frac{(z_2-z_4)^2}{(z_1-z_3)^2}$; on a d'ailleurs, dans ce cas,

$$1-\frac{(z_2-z_4)^2}{(z_1-z_3)^2}=\frac{4(z_2z_4-z_1z_3)}{(z_1-z_3)^2};$$

on aura donc

$$x_1=1$$

si l'on a

$$z_2z_4<z_1z_3,$$

$x_3=1$ dans le cas contraire. Le Tableau qui donne la correspondance des valeurs de z et de x est alors le suivant :

$z_2z_4<z_1z_3$.				$z_2z_4>z_1z_3$.			
z	$-\infty$	$\frac{z_1+z_3}{2}$	$+\infty$	z	$-\infty$	$\frac{z_1+z_3}{2}$	$+\infty$
x	1	x_3	1	x	1	x_1	1
Signe de $\varphi(z)$	$-$		$+$	Signe de $\varphi(z)$	$+$		$-$

Quant à la supposition $z_2z_4=z_1z_3$, on doit la rejeter, car alors les deux racines z_2, z_4 seraient égales aux racines z_1, z_3.

614. En appliquant ce qui précède au cas où Z est un trinome bicarré ayant au moins deux racines imaginaires, on obtient les résultats suivants, dans lesquels on a fait figurer d'abord la trans-

formation employée, puis les limites entre lesquelles doivent rester les variables pour que les expressions sous les radicaux soient positives, enfin la relation différentielle. Tout est supposé réel.

$$x = \frac{z^2 - 1}{z^2 + c^2}, \qquad \begin{array}{lll} A > 0, & z^2 > 1, & 0 < x < 1, \\ A < 0, & z^2 < 1, & -\dfrac{1}{c^2} < x < 0, \end{array}$$

$$\frac{dz.\operatorname{sgn} z}{\left|\sqrt{A(z^2-1)(z^2+c^2)}\right|} = \frac{dx}{\left|\sqrt{4Ax(1-x)(c^2x+1)}\right|};$$

$$x = \frac{z^2+1}{z^2+c^2}, \qquad x \text{ compris entre } 1 \text{ et } \frac{1}{c^2},$$

$$\frac{dz.\operatorname{sgn}[(c^2-1)z]}{\left|\sqrt{A(z^2+1)(z^2+c^2)}\right|} = \frac{dx}{\left|\sqrt{4Ax(1-x)(c^2x-1)}\right|};$$

$$x = \frac{z^2+2rz\cos\theta+r^2}{z^2-2rz\cos\theta+r^2}, \qquad x \text{ compris entre } \operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2} \text{ et } \frac{1}{\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}},$$

$$\frac{dz.\operatorname{sgn}[r(r^2-z^2)\cos\theta]}{\left|\sqrt{A(z^2+2rz\cos\theta+r^2)(z^2-2rz\cos\theta+r^2)}\right|}$$

$$= \frac{dx}{\left|\sqrt{16Ar^2x\left(x\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin^2\frac{\theta}{2}-x\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}\right|}.$$

Le lecteur pourra appliquer ces formules aux différentielles

$$\frac{dz}{\sqrt{z^4-1}}, \qquad \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}, \qquad \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}}.$$

615. Lorsque non seulement les coefficients de Z mais aussi le chemin d'intégration est réel, on a maintenant tout ce qu'il faut pour ramener *directement* l'évaluation d'une intégrale quelconque de la forme $\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$ à celle d'une intégrale du type normal de Weierstrass $\int \frac{dy}{-\sqrt{Y}}$, ou à celle d'une intégrale du type normal de Legendre $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, où k^2 est réel et com-

pris entre o et 1. On évite ainsi les transformations que nous avons étudiées à la fin du Chapitre VII du Tome III.

Quand les racines de Z sont toutes *réelles,* on fera l'une des transformations linéaires indiquées; dans le cas contraire, on commencera par faire l'une des transformations quadratiques qui conduisent à un polynome dont toutes les racines sont réelles.

CHAPITRE X.

INTÉGRALES ELLIPTIQUES.

I. — Évaluation des intégrales elliptiques.

616. On appelle *intégrale elliptique* toute intégrale de la forme $\int F(x, \sqrt{X})\,dx$, où X est un polynome en x du troisième ou du quatrième degré, à racines inégales, et $F(x, \sqrt{X})$ une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{X}$. Soit par la substitution linéaire (CXXXII), soit par un autre procédé qui sera étudié au Chapitre suivant, (CXLIII), on peut ramener une telle intégrale à la forme $\int f(y, \sqrt{Y})\,dy$, où $Y = 4y^3 - g_2 y - g_3$ est un polynome à racines inégales et où $f(y, \sqrt{Y})$ est une fonction rationnelle de y et de $\sqrt{Y}$.

Supposons que l'intégrale proposée soit une intégrale définie, prise le long d'un chemin (x) allant du point x_0 au point x_1, et ne passant ni par une racine de X ni par un pôle de $F(x, \sqrt{X})$; le long de ce chemin (x) convenons d'entendre par $\sqrt{X}$ la détermination de cette fonction qui résulte, par continuité, de cette même détermination pour un point particulier, pour le point initial x_0, par exemple. On pourra, en appliquant le théorème de Cauchy, substituer au chemin (x) un chemin ayant les mêmes extrémités et qui soit équivalent au chemin (x), c'est-à-dire qui conduise à la même valeur de l'intégrale. On peut donc, si l'on veut, supposer de suite que le chemin (x) se compose de segments de droite ou d'arcs de cercle.

Si l'on emploie la substitution linéaire (CXXXII$_1$), les propositions du n° 597 feront connaître le chemin (y) correspondant

au chemin (x); l'intégrale $\int f(y, \sqrt{Y})\,dy$ doit être prise le long de ce chemin (y). La détermination de $\sqrt{Y}$ pour un point quelconque y du chemin (y) résulte de celle de $\sqrt{X}$ au point correspondant x du chemin (x) au moyen de la formule (CXXXII_2); on obtiendra ainsi, en particulier, la détermination initiale $\sqrt{Y_0}$ de $\sqrt{Y}$ pour le point initial y_0 correspondant au point x_0.

Si l'on fait ensuite la substitution $y = p(u; g_2, g_3)$ et si l'on détermine, dans le plan des u, un chemin (u) correspondant aux chemins (y) et (x) par les formules

$$(1) \qquad u - u_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{-\sqrt{Y}} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

où les intégrales sont prises le long des portions des chemins (y) ou (x), qui partent des points y_0 ou x_0 pour aller aux points y ou x, et où u_0 est l'une quelconque des valeurs de u qui satisfont aux équations concordantes

$$y_0 = p\,u_0, \qquad \sqrt{Y_0} = -p'u_0,$$

on aura, tout le long des deux chemins (y) et (u), en deux points correspondants, les relations $y = p\,u$, $\sqrt{Y} = -p'u$, et l'on sera ramené au calcul de l'intégrale

$$\int f(p\,u, -p'u)\,p'u\,du,$$

où le signe $\int$ porte sur une fonction doublement périodique, et où la variable doit suivre un chemin connu (u). L'évaluation d'une pareille intégrale a été traitée au Chapitre VIII du Tome III.

Quant à la détermination du chemin (u), observons d'abord que ce chemin se réduit à une portion de l'axe des quantités réelles si l'on n'a affaire qu'à des fonctions réelles de variables réelles; on n'a alors qu'à en déterminer les extrémités. Lorsque les coefficients de X, Y sont réels, les variables x, y étant d'ailleurs quelconques, nous avons donné au Chapitre IX tous les détails nécessaires pour l'évaluation des intégrales $\int \frac{dy}{-\sqrt{Y}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ qui figurent dans la formule (1), et l'on pourra donc, dans ce cas, déterminer le chemin (u) avec autant d'approximation qu'on le

voudra : on n'a d'ailleurs pas besoin de déterminer les points intermédiaires avec autant de précision que les extrémités u_0, u_1, parce que, pour l'évaluation de l'intégrale de la fonction doublement périodique, on peut remplacer le chemin (u) par un chemin équivalent; toutefois, on doit se rendre compte de la façon dont le chemin (u) est placé par rapport aux pôles de la fonction doublement périodique.

Il est à peine utile de dire que l'on peut tout aussi bien ramener l'intégrale proposée à une intégrale de la forme $\int f(z, \sqrt{Z})\,dz$, où Z est de la forme $(1-z^2)(1-k^2z^2)$ et où $f(z, \sqrt{Z})$ est une fonction rationnelle de z et de $\sqrt{Z}$; par la substitution $z = \operatorname{sn} u$, $\sqrt{Z} = \operatorname{sn}' u$, on est ensuite ramené à l'intégration d'une fonction doublement périodique.

617. Il nous reste, relativement à la détermination des pôles et au développement de la fonction doublement périodique dans leur voisinage, à donner quelques indications qui n'ont pas trouvé place dans le Chapitre VI du Tome III.

En posant, pour abréger, $y = pu$, $y' = p'u$, la fonction doublement périodique que l'on a à intégrer peut être supposée mise sous la forme

$$\varphi(u) = \frac{P + Qy'}{R + Sy'},$$

en désignant par P, Q, R, S des polynomes en y de degrés respectifs α, β, γ, δ, polynomes que l'on peut supposer sans plus grand commun diviseur.

On reconnaît tout d'abord, en remplaçant dans cette expression y et y' par $\frac{1}{u^2} + \frac{g_2 u^2}{20} + \ldots$, $\frac{-2}{u^3} + \frac{g_2 u}{10} + \ldots$, que o est un pôle de $\varphi(u)$ lorsque le plus grand m des nombres 2α, $2\beta + 3$ est supérieur au plus grand n des nombres 2γ, $2\delta + 3$; l'ordre de multiplicité du pôle o est $m - n = \mu$. Si l'on ordonne le numérateur et le dénominateur de $\varphi(u)$ suivant les puissances croissantes de u, que l'on effectue la division du numérateur par le dénominateur jusqu'à ce qu'on ne trouve plus au quotient de puissances négatives de u, puis que l'on mette ce quotient sous la forme

$$A\,\frac{1}{u} + A_1 D\,\frac{1}{u} + A_2 D^{(2)}\,\frac{1}{u} + \ldots + A_{\mu-1} D^{(\mu-1)}\,\frac{1}{u},$$

la partie de $\varphi(u)$ qui correspond au pôle o, c'est-à-dire la partie de $\varphi(u)$ qui devient infinie pour $u = 0$, sera (n° 358)

$$A\zeta u + A_1\zeta' u + A_2\zeta'' u + \ldots + A_{\mu-1}\zeta^{(\mu-1)} u.$$

Considérons maintenant un pôle $u = a$ de $\varphi(u)$ qui ne soit pas congru à o, *modulis* $2\omega_1$, $2\omega_3$. Le numérateur de $\varphi(u)$ étant fini, le dénominateur doit être nul pour $u = a$; on résoudra donc les équations simultanées en y, y'

$$R + Sy' = 0, \qquad y'^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3.$$

Soit $y = b$, $y' = b'$ une solution de ces équations et $u = a$ une solution des équations $pu = b$, $p'u = b'$; $u = a$ sera un pôle, si $P + Qy'$ n'est pas nul pour $y = b$, $y' = b'$. Pour s'assurer dans tous les cas que a est un pôle, et pour trouver la partie correspondante de $\varphi(u)$, on pourra ramener ce cas au précédent en faisant le changement de variable $u = v + a$; les formules d'addition permettront d'exprimer $p(v+a)$, $p'(v+a)$ rationnellement en pv, $p'v$, b, b' et de transformer $\varphi(u)$ en une fonction rationnelle de pv, $p'v$. On peut aussi, pour obtenir les premiers termes du développement de $\varphi(a+v)$ suivant les puissances croissantes de v, remplacer $p(a+v)$, $p'(a+v)$ par leurs développements de Taylor suivant les puissances croissantes de v, ordonner le numérateur et le dénominateur de $\varphi(a+v)$ suivant ces mêmes puissances, effectuer enfin la division en ne gardant au quotient que les puissances négatives de v. Il n'est pas inutile d'observer que l'ordre de multiplicité de la racine b de l'équation

$$R^2 - 4b^3S^2 + g_2 bS^2 - g_3 S^2 = 0$$

est l'ordre de multiplicité du pôle a, dans le cas où b n'est pas une racine commune à R et à S, où b' n'est pas nul, et où $P + Qy'$ n'est pas nul pour $y = b$, $y' = b'$; autrement, l'ordre de multiplicité est abaissé.

Ayant déterminé l'un après l'autre les pôles distincts de $\varphi(u)$, puis les parties correspondantes de $\varphi(u)$, la somme de toutes ces parties sera égale à la fonction $\varphi(u)$, à une constante additive près, que l'on pourra déterminer en donnant à u une valeur arbitraire, par exemple la valeur o, si o n'est pas un pôle. Si donc on reprend

les notations du n° 358, en écrivant toutefois $\varphi(u)$ à la place de $f(u)$, on aura

$$\varphi(u) = C + \sum_{i=1}^{i=\nu} [A^{(i)}\zeta(u-a_i) + A_1^{(i)}\zeta'(u-a_i) + \ldots + A_{\alpha_i-1}^{(i)}\zeta^{(\alpha_i-1)}(u-a_i)],$$

et toutes les constantes qui figurent dans le second membre seront connues. La somme $A^{(1)} + \ldots + A^{(\nu)}$ est nulle.

618. L'intégrale indéfinie $\int \varphi(u)\,du$ est, en général, une fonction linéaire de u et de termes tels que $\log\sigma(u-a)$, $\zeta(u-a)$, $p(u-a)$, $p'(u-a)$, ..., a étant un pôle quelconque; à cause des formules d'addition (VII_3) et de celles qu'on en déduit en prenant les dérivées, on voit aisément que cette intégrale indéfinie contient un terme en u, un terme en ζu, une fonction rationnelle de pu, $p'u$ et autant de termes en $\log\sigma(u-a)$ qu'il y a de pôles a pour lesquels le résidu correspondant n'est pas nul.

Pour que cette intégrale soit une fonction univoque de u, il faut et il suffit qu'elle ne contienne pas de logarithmes, c'est-à-dire que chaque résidu $A^{(i)}$ soit nul ($i = 1, 2, \ldots, \nu$). Pour qu'elle soit une fonction doublement périodique de u, avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$, il faut et il suffit qu'elle ne contienne ni logarithmes, ni terme linéaire en u, ni terme en $\zeta(u)$, c'est-à-dire que l'on ait

$$A^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu), \qquad C = 0, \qquad \sum_{i=1}^{i=\nu} A_1^{(i)} = 0.$$

On obtient ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale $\int F(x, \sqrt{X})\,dx$ s'exprime rationnellement en x, $\sqrt{X}$.

Il peut arriver que cette dernière intégrale soit la somme d'une fonction rationnelle en x, $\sqrt{X}$ et de logarithmes, multipliés par des constantes, de telles fonctions. Elle est dite alors *pseudo-elliptique*. Les conditions pour qu'il en soit ainsi sont beaucoup plus cachées. Nous nous contentons de signaler ce problème, sur lequel le lecteur trouvera d'intéressants développements dans le dernier Chapitre du second Volume du *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen.

II. — Réduction de Legendre.

619. En se plaçant à un tout autre point de vue, Legendre a montré que l'évaluation d'une intégrale de la forme $\int F(x, \sqrt{X})\,dx$ se ramenait à des intégrations élémentaires et à l'évaluation d'intégrales rentrant dans trois types simples. Bien que le procédé d'intégration que nous venons de décrire dispense d'appliquer le mode de réduction de Legendre, ce mode de réduction n'en garde pas moins un intérêt propre, non pas seulement parce qu'il peut être pratiquement utile dans certains cas, mais surtout parce qu'il est l'origine de la classification des intégrales en intégrales de première, de deuxième et de troisième espèce, classification qui s'étend de la façon la plus naturelle aux intégrales de la même nature (dites *hyperelliptiques*) où le radical porte sur un polynome de degré supérieur au quatrième.

Tout d'abord, l'expression $F(x, \sqrt{X})$, mise sous la forme $\frac{P + Q\sqrt{X}}{R + S\sqrt{X}}$, où P, Q, R, S sont des polynomes entiers en x, se ramène, en multipliant en haut et en bas par $R - S\sqrt{X}$, à la forme $M + \frac{N}{\sqrt{X}}$, où M, N sont des fonctions rationnelles en x. La première partie s'intègre par les fonctions élémentaires. En décomposant N en fractions simples, on ramène l'intégration de la seconde partie à celle d'intégrales de la forme $\int \frac{x^p\,dx}{\sqrt{X}}$ ou $\int \frac{dx}{(x-a)^p\sqrt{X}}$, que nous comprendrons sous le type unique

$$X_p = \int \frac{(x-a)^p\,dx}{\sqrt{X}},$$

où p est un nombre entier positif ou négatif. Si l'on pose

$$X = A(x-a)^4 + 4B(x-a)^3 + 6C(x-a)^2 + 4D(x-a) + E,$$

dans l'identité

$$\frac{d}{dx}\left[(x-a)^r\sqrt{X}\right] = \frac{r(x-a)^{r-1}X + \frac{1}{2}(x-a)^r X'}{\sqrt{X}},$$

où r est un entier quelconque et où X' est la dérivée de X, on trouve, après avoir intégré,

$$(r+2)AX_{r+3}+2(2r+3)BX_{r+2}+6(r+1)CX_{r+1}$$
$$+2(2r+1)DX_r+rEX_{r-1}=(x-a)^r\sqrt{X}.$$

Si E n'est pas nul, c'est-à-dire si a n'est pas racine de X, on peut résoudre cette équation par rapport à X_{r-1}, tant que r n'est pas nul; si E est nul, D n'est pas nul, sans quoi X admettrait la racine double a, et l'on peut toujours résoudre l'équation précédente par rapport à X_r. Il résulte de là que si p est négatif, X_p peut toujours s'exprimer au moyen d'intégrales analogues à indices positifs ou nuls, de X_{-1} et de quantités algébriques.

Pour ce qui est des intégrales à indice positif, elles se ramènent à la forme $\int \frac{x^p\,dx}{\sqrt{X}}$; nous continuerons à les désigner par X_p et nous emploierons la même formule de réduction en supposant $a=0$ et en regardant A, B, C, D, E comme les coefficients mêmes du polynome X. On peut alors résoudre la formule de réduction par rapport à X_{r+3} si A n'est pas nul, par rapport à X_{r+2} si A est nul; on voit donc, si A n'est pas nul, que $X_3, X_4, X_5, \ldots$ s'expriment au moyen de X_0, X_1, X_2, et si A est nul, que $X_2, X_3, X_4, \ldots$ s'expriment au moyen de X_0, X_1. Dans le premier cas, on peut pousser plus loin la réduction; cela est évident si X est bicarré, car alors X_1 se ramène aux transcendantes élémentaires en prenant x^2 pour variable.

Bornons-nous aux cas où X a l'une des formes $(1-x^2)(1-k^2x^2)$, $4x^3-g_2x-g_3$. On voit qu'on n'a à considérer que trois types d'intégrales, qui sont, dans le premier cas,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}, \qquad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}$$

et, dans le second cas,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}, \qquad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}.$$

Ces intégrales sont dites respectivement *intégrales elliptiques de première, de deuxième, de troisième espèce*. Le type des intégrales de seconde espèce change avec la forme de X.

620. Ces mêmes dénominations sont employées avec des significations différentes, que nous expliquerons tout à l'heure, et qui d'ailleurs permettent toujours de dire, comme le lecteur s'en convaincra sans peine, que l'évaluation d'une intégrale elliptique se ramène à l'évaluation d'une intégrale de première espèce, d'une intégrale de deuxième espèce et d'une ou plusieurs intégrales de troisième espèce. Mais, en restant encore un instant au point de vue où nous nous sommes placés, nous voulons remarquer que si l'on regarde les intégrales ci-dessus comme effectuées le long d'un chemin et comme fonctions de leur limite supérieure x, c'est-à-dire de l'extrémité finale de ce chemin, l'intégrale de première espèce reste finie quel que soit x, même pour x infini, tandis que l'intégrale de deuxième espèce devient infinie avec x, et que l'intégrale de troisième espèce devient infinie comme $\log(x-a)$ quand x s'approche de a. Les fonctions de x ainsi définies restent d'ailleurs holomorphes dans toute aire limitée par un contour simple, d'où le chemin d'intégration ne doit pas sortir, et où $\frac{1}{\sqrt{X}}$ (s'il s'agit des intégrales des deux premières espèces), $\frac{1}{(x-a)\sqrt{X}}$ (s'il s'agit de l'intégrale de troisième espèce), est une fonction holomorphe de x. Mais les choses se passent d'une façon un peu différente aux environs du point ∞, suivant la forme de X. En nous bornant par exemple aux intégrales de première espèce, si l'on fait la substitution $x = \frac{1}{z}$, on aura

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{-dz}{\sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int \frac{-dz}{\sqrt{z(4 - g_2 z^2 - g_3 z^3)}};$$

or, dans le voisinage du point $z = 0$, qui correspond au point $x = \infty$, $\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)}}$ est une fonction holomorphe de z, mais non $\frac{1}{\sqrt{z(4-g_2z^2-g_3z^3)}}$; nous aurons l'occasion, à propos des notations de Weierstrass, de revenir bientôt sur le second cas.

III. — Notations de Jacobi.

621. Nous avons maintenant à expliquer quelques notations et expressions qu'il est indispensable de connaître.

Supposant k réel, positif et plus petit que un, et désignant par $\Delta\varphi$, où φ est un angle réel, la détermination positive du radical $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, Legendre pose

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \qquad E(\varphi) = \int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi,$$

$$F^{(1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \qquad E^{(1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi\, d\varphi,$$

et appelle $F(\varphi)$, $E(\varphi)$ fonctions elliptiques de première et de seconde espèce. $F^{(1)}$ et $E^{(1)}$ sont les fonctions *complètes*.

Le mot *fonction elliptique* a pris, depuis Jacobi, un sens entièrement différent : on entend généralement sous ce nom les fonctions que nous avons désignées sous le nom de *fonctions doublement périodiques du second ordre*.

La fonction $F(\varphi)$ de Legendre n'est autre chose que *l'intégrale elliptique* de première espèce (n° 619) $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, dans laquelle on a remplacé x par $\sin\varphi$. La fonction $E(\varphi)$ de Legendre est égale à $F(\varphi) - k^2\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi$; c'est donc une combinaison linéaire d'une intégrale elliptique de première et d'une intégrale elliptique de seconde espèce (n° 619).

Legendre a encore introduit la notation $\Pi(n, \varphi)$, où n est un paramètre, pour désigner l'intégrale

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = \int_0^\varphi \frac{\frac{1}{2}\,d\varphi}{(1-\sqrt{-n}\sin\varphi)\,\Delta\varphi} + \int_0^\varphi \frac{\frac{1}{2}\,d\varphi}{(1+\sqrt{-n}\sin\varphi)\,\Delta\varphi};$$

c'est, en conservant la définition du n° 619, la somme de deux intégrales elliptiques de troisième espèce, intégrales dont la différence s'exprime d'ailleurs au moyen des fonctions élémentaires.

Il peut n'être pas inutile d'observer que la valeur de $\Delta\varphi$ est toujours comprise entre k' et 1, et que l'on a, pour chaque valeur de φ, $\Delta\varphi \geqq \cos\varphi$.

622. Jacobi a introduit d'autres notations, sur lesquelles nous insisterons un peu plus. Les fonctions de la variable u, qu'il a désignées par les notations $\operatorname{am} u$, $\operatorname{co\,am} u$, $\mathrm{E}(u)$, $\Pi(u, \alpha)$, peuvent être définies par les formules

$$(\mathrm{CII}_6)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{am} u = \int_0^u \operatorname{dn} u\, du, \qquad \operatorname{co\,am} u = \operatorname{am}(\mathrm{K} - u),\\ &\mathrm{E}(u) = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u\, du, \qquad \Pi(u, \alpha) = \int_0^u \frac{k^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \operatorname{sn}^2 u\, du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2 u}, \end{aligned}\right.$$

dans la dernière desquelles α est un paramètre. Le *module* k doit être regardé comme une donnée, différente de 0 et de 1.

Les quantités que Jacobi désigne par K, K' coïncident avec celles que nous avons désignées par $\mathrm{X}(k^2)$, $\mathrm{X}'(k^2)$; la quantité τ, qui permet de construire les fonctions sn, cn, dn (n^{os} 518, 306, formules $\mathrm{LXXI}_{6,7,8}$, $\mathrm{XXXVII}_{1,2}$), et qui figure dans les définitions précédentes, est supposée égale à $\frac{i\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}$. Les notations $\operatorname{am}(u, k)$, $\mathrm{E}(u, k)$, ... au lieu de $\operatorname{am} u$, $\mathrm{E}(u)$, ... s'entendent d'elles-mêmes.

Lorsque k est réel, compris entre 0 et 1, la quantité K de Jacobi coïncide avec la quantité $\mathrm{F}^{(1)}$ de Legendre.

623. Considérons d'abord la fonction $\operatorname{am} u$. La fonction $\operatorname{dn} u$ admet pour pôles les points $2n\mathrm{K} + (2n + 1)i\mathrm{K}'$, en désignant par n et n' des entiers; les résidus correspondants sont égaux à $\pm i$. Si l'on se borne à assujettir le chemin d'intégration à ne pas passer par ces pôles, on voit donc que la fonction $\operatorname{am} u$ n'est définie qu'à un multiple près de 2π. La fonction $\operatorname{dn} u$ est holomorphe à l'intérieur de la bande limitée par les deux parallèles qui sont le lieu des points $\mathrm{K}t \pm i\mathrm{K}'$ quand on fait croître la variable réelle t de $-\infty$ à $+\infty$. On peut donc regarder $\operatorname{am} u$ comme une fonction holomorphe à l'intérieur de cette bande, qui, dans le cas où k^2 est réel et plus petit que un, comprend l'axe des quantités réelles. La fonction $\operatorname{am} u$ est évidemment impaire.

Au reste ces résultats apparaissent encore sur l'une des formules (CXV_1),

$$\int_0^u \operatorname{dn} u \, du = i \log(\operatorname{cn} u - i \operatorname{sn} u).$$

La même formule montre que l'on a

$$\operatorname{cn} u - i \operatorname{sn} u = e^{-i \operatorname{am} u};$$

d'où, en changeant u en $-u$, ajoutant et retranchant, on déduit

$$(CII_6) \qquad \sin \operatorname{am} u = \operatorname{sn} u, \qquad \cos \operatorname{am} u = \operatorname{cn} u.$$

624. Si l'on se replace dans le cas où k^2 est réel, compris entre o et 1, on voit aisément, à l'aide des formules précédentes et de celles qui donnent les dérivées, par rapport à u, de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, que les fonctions $\Delta\varphi$, $F(\varphi)$ de Legendre se réduisent à $\operatorname{dn} u$ et u quand on y remplace φ par $\operatorname{am} u$.

C'est en réalité la fonction inverse de $F(\varphi)$ que Jacobi a désignée par $\operatorname{am} u$; en d'autres termes, il a regardé la limite supérieure φ de l'intégrale $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ comme une fonction de la valeur u de cette intégrale, et il a appelé $\operatorname{am} u$ cette fonction. Dans les mêmes conditions, $\Delta(\operatorname{am} u)$ n'est autre chose que $\operatorname{dn} u$. Depuis Jacobi, on désigne par $\Delta \operatorname{am} u$, quels que soient u et k^2, exactement la fonction de u que nous avons désignée par $\operatorname{dn} u$.

En regardant $\operatorname{am} u$ comme une fonction holomorphe de u dans la bande définie plus haut, on aperçoit immédiatement les relations

$$(CII_6) \quad \operatorname{am}(K) = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{am}(nK) = n\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{am}(u + 2nK) = \operatorname{am} u + n\pi,$$

où n est un entier.

Quand u augmente par valeurs réelles et que k^2 est compris entre o et 1, on voit immédiatement que la fonction $\operatorname{am} u$ augmente toujours; son signe est celui de u.

Les expressions de $\sin \operatorname{co} \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{co} \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{co} \operatorname{am} u$, au moyen de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, se déduisent immédiatement de la définition de $\operatorname{co} \operatorname{am} u$ et des formules ($LXXII_5$).

625. La fonction $E(u)$ de Jacobi est univoque; on voit (nº 432) qu'on peut écrire

$$(\text{CII}_5)\qquad E(u)=\frac{E}{K}u+Z(u);$$

le nombre E est égal (nº 432) à $\int_0^K \operatorname{dn}^2 u\,du$; on voit qu'il est égal à $E(K)$; c'est le $E^{(1)}$ de Legendre.

Le théorème d'addition de la fonction ζ conduit de suite aux théorèmes d'addition des fonctions $Z(u)$, $E(u)$, à savoir :

$$\begin{aligned}Z(u)-Z(a)-Z(u-a)&=E(u)-E(a)-E(u-a)\\&=-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}a\operatorname{sn}(u-a);\end{aligned}$$

on en tire aisément la relation

$$(a)\qquad 2Z(a)-Z(a+u)-Z(a-u)=\frac{2k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}^2u}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2u}.$$

Signalons encore la fonction $\Omega(u)$, introduite aussi par Jacobi et définie par l'égalité

$$(\text{CII}_{11})\qquad \Omega(u)=e^{\int_0^u E(u)\,du}=e^{\frac{1}{2}\frac{E}{K}u^2}\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}.$$

On voit comment, dans cet ordre d'idées, s'introduit la fonction Θ.

626. La fonction $\Pi(u,\alpha)$ de Jacobi s'exprime au moyen des fonctions Z, Θ; cette expression s'obtient en appliquant les règles générales d'intégration, ou en intégrant, entre les limites 0 et u, les deux membres de l'égalité (a); on trouve ainsi

$$(\text{CII}_5)\qquad \Pi(u,\alpha)=u\,Z(\alpha)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(\alpha-u)}{\Theta(\alpha+u)},$$

ou encore, en tenant compte de la définition de $\Omega(u)$,

$$(\text{CII}_{11})\qquad \Pi(u,\alpha)=u\,E(\alpha)+\frac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-\alpha)}{\Omega(u+\alpha)}.$$

Dans ces deux formules, la détermination du logarithme dépend en général du chemin d'intégration (nº 501); il est à peine utile de signaler le cas, fréquent dans les applications, où le second

membre doit être réel parce que le premier l'est évidemment. On a, en particulier,

$$(\mathrm{CII}_{10}) \qquad \Pi(\mathrm{K}, \alpha) = \mathrm{K}\mathrm{Z}(\alpha) = \mathrm{K}\mathrm{E}(\alpha) - \alpha\mathrm{E}.$$

L'expression de $\Pi(u, \alpha)$, au moyen de la fonction Ω et la définition de cette fonction, mettent en évidence que la dérivée de $\Pi(u, \alpha)$, prise par rapport à u, s'exprime au moyen de $\mathrm{E}(u)$; il en résulte ce théorème de Jacobi :

La dérivée d'une intégrale elliptique de troisième espèce, par rapport à l'intégrale elliptique de première espèce prise comme variable, s'exprime au moyen d'intégrales elliptiques de première espèce et d'intégrales elliptiques de seconde espèce.

Le théorème de l'échange du paramètre et de l'argument s'exprime par la formule

$$\Pi(u, \alpha) - \Pi(\alpha, u) = u\mathrm{Z}(\alpha) - \alpha\mathrm{Z}(u),$$

où le second membre devrait être augmenté d'un multiple de $2\pi i$ si on laissait aux fonctions Π toute leur indétermination.

Le théorème d'addition de la fonction Π s'exprime par la formule

$$\begin{aligned}
&\Pi(u, \alpha) + \Pi(v, \alpha) - \Pi(u + v, \alpha) \\
&\quad = \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - \alpha)\,\Theta(v - \alpha)\,\Theta(u + v + \alpha)}{\Theta(u + \alpha)\,\Theta(v + \alpha)\,\Theta(u + v - \alpha)} \\
&\quad = \frac{1}{2} \log \frac{1 - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn}(u + v - \alpha)}{1 + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn}(u + v + \alpha)} \\
&\quad = \frac{1}{4} \log \left\{ \frac{[1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u + \alpha) \operatorname{sn}^2(v + \alpha)]\,[1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2(u + v - \alpha)]}{[1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u - \alpha) \operatorname{sn}^2(v - \alpha)]\,[1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2(u + v + \alpha)]} \right\} \\
&\quad = \frac{1}{2} \log \frac{-\mathrm{Z}(\alpha + u) + \mathrm{Z}(\alpha + v) + \mathrm{Z}(u + i\mathrm{K}') - \mathrm{Z}(v + i\mathrm{K}')}{\mathrm{Z}(\alpha - u) - \mathrm{Z}(\alpha - v) + \mathrm{Z}(u - i\mathrm{K}') - \mathrm{Z}(v - i\mathrm{K}')}.
\end{aligned}$$

IV. — Notations de Weierstrass [1].

627. L'intégrale elliptique normale de première espèce, au sens de Weierstrass, est l'intégrale $\int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}}$, où $\mathrm{Y} = 4y^3 - g_2 y - g_3$: on

---

[1] *Voir* SCHWARTZ, *Formules*, etc., nos 56, 57.

la désigne par $J(y, \sqrt{Y})$: cette intégrale n'est déterminée que si l'on se donne la valeur initiale de $\sqrt{Y}$ et le chemin d'intégration, qui ne doit passer par aucun des points e_1, e_2, e_3, et le long duquel les valeurs de $\sqrt{Y}$ se déduisent par continuation de la valeur initiale. A cause de la limite supérieure, quelques remarques concernant ce chemin sont nécessaires.

Considérons un cercle décrit de l'origine comme centre et contenant à son intérieur les points e_1, e_2, e_3; désignons par S la région extérieure au cercle, dans laquelle on regarde comme une coupure la portion de l'axe des quantités négatives qui est extérieure au cercle, en sorte que la région S est limitée par le cercle et cette coupure. Dans S, $\frac{1}{\sqrt{Y}}$ est une fonction holomorphe de y, déterminée dès qu'on se donne sa valeur en un point : elle peut être représentée par une série $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ entière en $\frac{1}{\sqrt{y}}$, ne contenant que des puissances impaires de $\frac{1}{\sqrt{y}}$ et commençant par un terme en $\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^3$. Au point de S où l'on se donne la détermination de $\sqrt{Y}$, l'égalité $\frac{1}{\sqrt{Y}} = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ détermine sans ambiguïté la valeur de $\sqrt{y}$, qui est dès lors déterminée dans toute la région S. Si l'on désigne par $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ la série entière en $\frac{1}{\sqrt{y}}$, commençant par un terme en $\frac{1}{\sqrt{y}}$, dont les différents termes ont pour dérivées, par rapport à y, les termes correspondants de $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$, changés de signe, il est clair que l'on aura

$$\int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right),$$

quel que soit le chemin d'intégration, pourvu qu'il ne sorte pas de S. Si la fonction pu est formée avec les invariants g_2, g_3, dans la même région S, les égalités $pu = y$, $p'u = -\sqrt{Y}$ définissent, à une constante additive près de la forme $2n\omega_1 + 2n'\omega_3$, u comme une fonction holomorphe de y; cette fonction ne peut

différer de $\wp_1\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ que par une constante C, puisqu'elle doit vérifier dans S, comme la fonction $\wp_1$, la relation $\frac{du}{dy} = \frac{1}{-\sqrt{Y}}$; la fonction $u = C + \wp_1\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ devant vérifier l'égalité $pu = y$ pour de grandes valeurs de y, C est nécessairement de la forme $2n\omega_1 + 2n'\omega_3$; en d'autres termes, $u = \wp_1\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ est une solution des équations $pu = y$, $p'u = -\sqrt{Y}$: toutes les autres solutions s'obtiennent en ajoutant à celle-là des multiples entiers des périodes.

Ceci posé, considérons un point quelconque y_0 et un chemin d'intégration allant de ce point au point ∞; nous nous bornerons à supposer, relativement à ce chemin, qu'il finit par rester dans la région S, à partir du point y_1, par exemple, point où le radical $\sqrt{Y}$ a acquis la valeur $\sqrt{Y_1}$, déduite par continuation de la valeur donnée $\sqrt{Y_0}$ de $\sqrt{Y}$ en y_0. La valeur $J(y_0, \sqrt{Y_0})$ de la fonction $J(y, \sqrt{y})$ en y_0 sera définie par l'égalité

$$J(y_0, \sqrt{Y_0}) = \int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \wp_1\left(\frac{1}{\sqrt{y_1}}\right);$$

$J(y_0, \sqrt{Y_0})$ ne dépend nullement de la partie du chemin d'intégration qui va de y_1 à l'infini, mais seulement de la portion du chemin qui va de y_0 à y_1. En un point quelconque y de cette portion de chemin, la fonction $J(y, \sqrt{Y})$ est définie par la même égalité, où il faut seulement effacer l'indice o; elle vérifie donc tout le long de ce chemin l'égalité $\frac{dJ}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{Y}}$, et peut être regardée comme la continuation, le long de ce chemin, de la fonction $\wp_1\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ avec laquelle elle coïncide aux environs de y_1. Tout le long de ce chemin, comme aux environs du point y_1, elle vérifiera les équations $pu = y$, $p'u = -\sqrt{Y}$, et il en sera ainsi, en particulier, au point y_0, pour lequel nous désignerons par u_0 la valeur de la fonction $J(y, \sqrt{Y})$.

Si l'on se donne les deux entiers n et n', et que l'on imagine, dans le plan des u, un chemin qui aille de u_0 à $u_0 + 2n\omega_1 + 2n'\omega_3$

sans passer par aucun des pôles ou des zéros de $p'u$, le point $y = pu$ décrira dans le plan des y un certain chemin fermé partant de y_0 pour y revenir, en ramenant aussi le radical $\sqrt{Y}$, qui ne cesse d'être égal à $-p'u$, à sa valeur primitive $\sqrt{Y_0}$. Si donc on désigne par (C) ce chemin fermé parcouru en sens inverse, et si l'on considère la valeur de la fonction $J(y, \sqrt{Y})$ au point y_0, origine du chemin d'intégration formé par le chemin (C) suivi de l'ancien chemin d'intégration, cette valeur sera égale à l'ancienne valeur u_0 augmentée de $2n\omega_1 + 2n'\omega_3$.

En résumé, la fonction $J(y, \sqrt{Y})$, si on la définit seulement par les valeurs de y et de $\sqrt{Y}$ sans se donner le chemin d'intégration, n'est définie qu'à une somme $2n\omega_1 + 2n'\omega_3$ de multiples de périodes près; en changeant le chemin d'intégration, on peut l'augmenter d'un nombre quelconque de la forme $2n\omega_1 + 2n'\omega_3$, où n et n' sont des entiers. L'ensemble de ses déterminations est identique avec l'ensemble des solutions des équations (en u), $pu = y$, $p'u = -\sqrt{Y}$.

628. L'intégrale elliptique normale de seconde espèce, $J'(y, \sqrt{Y})$, au sens de Weierstrass, est une fonction analytique de y dont la dérivée est $\frac{y}{\sqrt{Y}}$. Cette condition permet de la définir, à une constante additive près, comme une fonction holomorphe de y dans toute région limitée par un contour simple où $\frac{1}{\sqrt{Y}}$ est aussi une fonction holomorphe.

Si dans la fonction ζu on remplace u par $J(y, \sqrt{Y})$, on obtiendra une fonction de y dont la dérivée sera $\frac{d\zeta u}{du} \times \frac{du}{dy}$, c'est-à-dire $\frac{y}{\sqrt{Y}}$. On peut donc prendre pour $J'(y, \sqrt{Y})$ précisément la fonction $\zeta[J(y, \sqrt{Y})]$. L'intégrale elliptique de seconde espèce est ainsi définie par les mêmes éléments que l'intégrale de première espèce; quand le chemin d'intégration change, de façon que $J(y, \sqrt{Y})$ augmente de $2n\omega_1 + 2n'\omega_3$, $J'(y, \sqrt{Y})$ augmente évidemment de $2n\eta_1 + 2n'\eta_3$. Dans la région S, la fonction $J'(y, \sqrt{Y})$ peut être définie comme une fonction holomorphe de y; ce sera

une série procédant suivant les puissances entières de $\frac{1}{\sqrt{y}}$ dont les termes auront pour dérivées respectives les termes de la série $y\mathfrak{P}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$; elle commencera par un terme en $\sqrt{y}$ et ne comportera aucun terme constant, puisque cette série peut aussi bien s'obtenir en remplaçant u par $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ dans la série $\frac{1}{u} - \frac{g_2}{60}u^3 + \ldots$ qui définit ζu.

On pourra poser, en général,

$$J'(y, \sqrt{Y}) = \int^y \frac{y\,dy}{\sqrt{Y}},$$

en choisissant convenablement la constante d'intégration.

629. L'intégrale elliptique normale de troisième espèce, au sens de Weierstrass, intégrale que l'on désigne par $J(y, \sqrt{Y}; y_1, \sqrt{Y_1})$, est une fonction analytique de la variable y et d'un paramètre y_1, dont la dérivée par rapport à y est

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{Y}+\sqrt{Y_1}}{y-y_1}\frac{1}{\sqrt{Y}}.$$

Si l'on y remplace y, $\sqrt{Y}$, y_1, $\sqrt{Y_1}$ respectivement par pu, $-p'u$, pu_1, $-p'u_1$, elle deviendra une fonction de u dont la dérivée, par rapport à u, sera $\frac{1}{2}\frac{p'u+p'u_1}{pu-pu_1}$. Une telle fonction est

$$\log\frac{\sigma(u_1-u)}{\sigma u\,\sigma u_1} + u\zeta u_1;$$

on pourra donc prendre pour $J(y, \sqrt{Y}; y_1, \sqrt{Y_1})$ l'expression que l'on obtient en remplaçant u et u_1 par $J(y, \sqrt{Y})$, $J(y_1, \sqrt{Y_1})$ dans $\log\frac{\sigma(u_1-u)}{\sigma u\,\sigma u_1} + u\zeta u_1$. Cette fonction, si même les quantités $J(y, \sqrt{Y})$, $J(y_1, \sqrt{Y_1})$ sont entièrement déterminées, n'est définie de cette façon qu'à un multiple près de $2\pi i$, à cause de la présence du logarithme.

Si l'on remplace, dans l'intégrale normale de troisième espèce, $J(y, \sqrt{Y})$ par $J(y, \sqrt{Y}) + 2n\omega_1 + 2n'\omega_3$, elle augmente de la

quantité

$$-2(n\eta_1+n'n_3)\,\mathrm{J}\left(y_1,\sqrt{\mathrm{Y}_1}\right)+2(n\omega_1+n'\omega_3)\,\mathrm{J}'\left(y_1,\sqrt{\mathrm{Y}_1}\right)+2n''\pi i.$$

630. Le théorème de l'échange du paramètre et de l'argument s'exprime dans les notations de Weierstrass par l'égalité

$$\begin{aligned}&\mathrm{J}\left(y,\sqrt{\mathrm{Y}}\,;\,y_1,\sqrt{\mathrm{Y}_1}\right)-\mathrm{J}\left(y_1,\sqrt{\mathrm{Y}_1}\,;\,y,\sqrt{\mathrm{Y}}\right)\\&\quad=\mathrm{J}\left(y,\sqrt{\mathrm{Y}}\right)\mathrm{J}'\left(y_1,\sqrt{\mathrm{Y}_1}\right)-\mathrm{J}'\left(y,\sqrt{\mathrm{Y}}\right)\mathrm{J}\left(y_1,\sqrt{\mathrm{Y}_1}\right)+(2n+1)\pi i.\end{aligned}$$

Les théorèmes d'addition pour les intégrales normales des trois espèces sont contenus dans la proposition suivante que nous empruntons textuellement à M. Schwarz (*Formules*, etc., n° 57).

Si l'on pose

$$u_1+u_2=u_3,$$

puis

$$\begin{array}{llll}x_0=\ \ \wp u_0, & x_1=\ \ \wp u_1, & x_2=\ \ \wp u_2, & x_3=\ \ \wp u_3,\\ y_0=-\wp' u_0, & y_1=-\wp' u_1, & y_2=-\wp' u_2, & y_3=-\wp' u_3,\end{array}$$

on aura les égalités

$$\begin{aligned}&\mathrm{J}\,(x_1,y_1)+\mathrm{J}\,(x_2,y_2)=\mathrm{J}\,(x_3,y_3),\\&\mathrm{J}'(x_1,y_1)+\mathrm{J}'(x_2,y_2)=\mathrm{J}'(x_3,y_3)+\frac{1}{2}\,\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2},\\&\mathrm{J}(x_1,y_1\,;\,x_0,y_0)+\mathrm{J}(x_2,y_2\,;\,x_0,y_0)\\&\quad=\mathrm{J}(x_3,y_3\,;\,x_0,y_0)-\log\frac{1}{2}\,\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{y_1+y_0}{x_1-x_0}+\frac{y_2+y_0}{x_2-x_0}\right).\end{aligned}$$

Chacune d'elles exprime que, si l'on attribue à chacune des intégrales qui figurent dans son premier membre l'une quelconque des valeurs en nombre illimité qu'elle est susceptible d'avoir, la somme obtenue est égale à l'une des valeurs en nombre illimité que peut avoir le second membre.

CHAPITRE XI.

SUBSTITUTIONS BIRATIONNELLES DE WEIERSTRASS. INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4.$$

631. Nous rappellerons d'abord quelques propriétés relatives à la forme du quatrième degré

$$R(z_1, z_2) = a_0 z_1^4 + 4a_1 z_1^3 z_2 + 6a_2 z_1^2 z_2^2 + 4a_3 z_1 z_2^3 + a_4 z_2^4.$$

Si l'on y fait la substitution

$$z_1 = \lambda_1 Z_1 + \mu_1 Z_2, \qquad z_2 = \lambda_2 Z_1 + \mu_2 Z_2,$$

elle devient

$$A_0 Z_1^4 + 4A_1 Z_1^3 Z_2 + 6A_2 Z_1^2 Z_2^2 + 4A_3 Z_1 Z_2^3 + A_4 Z_2^4,$$

en posant

$$A_0 = R(\lambda_1, \lambda_2), \qquad 4A_1 = \mu_1 R'_{\lambda_1} + \mu_2 R'_{\lambda_2},$$

$$12A_2 = \mu_1^2 R''_{\lambda_1^2} + 2\mu_1\mu_2 R''_{\lambda_1\lambda_2} + \mu_2^2 R''_{\lambda_2^2} = \lambda_1^2 R''_{\mu_1^2} + 2\lambda_1\lambda_2 R''_{\mu_1\mu_2} + \lambda_2^2 R''_{\mu_2^2},$$

$$4A_3 = \lambda_1 R'_{\mu_1} + \lambda_2 R'_{\mu_2}, \qquad A_4 = R(\mu_1, \mu_2);$$

dans ces égalités, R'_{λ_1}, R'_{λ_2}, $R''_{\lambda_1^2}$, $R''_{\lambda_1\lambda_2}$, $R''_{\lambda_2^2}$ d'une part et R'_{μ_1}, ..., $R''_{\mu_2^2}$ d'autre part, désignent ce que deviennent les dérivées partielles $\frac{\partial R}{\partial z_1}$, $\frac{\partial R}{\partial z_2}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial z_1^2}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial z_1\,\partial z_2}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial z_2^2}$ quand on y remplace z_1, z_2 par λ_1, λ_2 ou par μ_1, μ_2.

Désignons par $H(z_1, z_2)$ le hessien de la forme $R(z_1, z_2)$, c'est-à-dire la forme

$$\begin{aligned} H(z_1, z_2) &= \frac{1}{144}\left(R''_{z_1^2} R''_{z_2^2} - R''^2_{z_1 z_2}\right) \\ &= (a_0 a_2 - a_1^2) z_1^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) z_1^3 z_2 \\ &\quad + (a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2) z_1^2 z_2^2 + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3) z_1 z_2^3 \\ &\quad + (a_2 a_4 - a_3^2) z_2^4. \end{aligned}$$

Si g_2, g_3 désignent les invariants de la forme $\mathrm{R}(z_1, z_2)$, savoir

$$
(\mathrm{CXLIII}_1) \qquad \left\{ \begin{aligned} g_2 &= 3a_2^2 - 4a_1a_3 + a_0a_4, \\ g_3 &= 2a_1a_2a_3 + a_0a_2a_4 - a_4a_1^2 - a_2^3 - a_0a_3^2, \end{aligned} \right.
$$

et si G_2, G_3 désignent les quantités analogues formées au moyen des coefficients $\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_4$ de la forme transformée, on a

$$
\mathrm{G}_2 = g_2\delta^4, \qquad \mathrm{G}_3 = g_3\delta^6,
$$

en supposant $\delta = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$.

Nous aurons besoin de l'identité

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{R}(z_1, z_2)\mathrm{R}(\lambda_1, \lambda_2) - \frac{1}{144}\left(z_1^2\mathrm{R}''_{\lambda_1^2} + 2z_1z_2\mathrm{R}''_{\lambda_1\lambda_2} + z_2^2\mathrm{R}''_{\lambda_2^2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3}\left(z_1^2\mathrm{H}''_{\lambda_1^2} + 2z_1z_2\mathrm{H}''_{\lambda_1\lambda_2} + z_2^2\mathrm{H}''_{\lambda_2^2}\right)(\lambda_2z_1 - \lambda_1z_2)^2 + \frac{1}{3}g_2(\lambda_2z_1 - \lambda_1z_2)^4.
\end{aligned}
$$

On y parvient en remarquant que le premier membre, multiplié par 144, n'est autre chose que le déterminant

$$
\begin{vmatrix}
z_1^2\mathrm{R}''_{z_1^2} + 2z_1z_2\mathrm{R}''_{z_1z_2} + z_2^2\mathrm{R}''_{z_2^2} & \lambda_1^2\mathrm{R}''_{z_1^2} + 2\lambda_1\lambda_2\mathrm{R}''_{z_1z_2} + \lambda_2^2\mathrm{R}''_{z_2^2} \\
z_1^2\mathrm{R}''_{\lambda_1^2} + 2z_1z_2\mathrm{R}''_{\lambda_1\lambda_2} + z_2^2\mathrm{R}''_{\lambda_2^2} & \lambda_1^2\mathrm{R}''_{\lambda_1^2} + 2\lambda_1\lambda_2\mathrm{R}''_{\lambda_1\lambda_2} + \lambda_2^2\mathrm{R}''_{\lambda_2^2}
\end{vmatrix}
$$

qui est le produit par $\lambda_2z_1 - \lambda_1z_2$ de la quantité

$$
2z_1\lambda_1\begin{vmatrix} \mathrm{R}''_{z_1^2} & \mathrm{R}''_{z_1z_2} \\ \mathrm{R}''_{\lambda_1^2} & \mathrm{R}''_{\lambda_1\lambda_2} \end{vmatrix} + (z_1\lambda_2 + z_2\lambda_1)\begin{vmatrix} \mathrm{R}''_{z_1^2} & \mathrm{R}''_{z_2^2} \\ \mathrm{R}''_{\lambda_1^2} & \mathrm{R}''_{\lambda_2^2} \end{vmatrix} - 2z_2\lambda_2\begin{vmatrix} \mathrm{R}''_{z_1z_2} & \mathrm{R}''_{z_2^2} \\ \mathrm{R}''_{\lambda_1\lambda_2} & \mathrm{R}''_{\lambda_2^2} \end{vmatrix};
$$

dans chaque déterminant, $\lambda_2z_1 - \lambda_1z_2$ se met encore en facteur, et l'on parvient ainsi à l'identité annoncée, qui, d'ailleurs, pourrait se déduire aussi de l'identité $\mathrm{G}_2 = g_2\delta^4$.

632. Notre but est d'intégrer l'équation

$$
(a) \qquad \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \mathrm{R}(z),
$$

où $\mathrm{R}(z)$ désigne le polynome en z obtenu en remplaçant dans $\mathrm{R}(z_1, z_2)$, z_1 par z et z_2 par 1; nous écrirons à l'occasion $\mathrm{R}(z, 1)$ pour conserver la trace de la seconde variable. Nous supposons que $\mathrm{R}(z)$ n'a pas de racines égales, et que a_0, a_1 ne s'annulent pas simultanément, ou encore, que la quantité $g_2^3 - 27g_3^2$ n'est

pas nulle. Nous avons vu (n° 598), qu'il existait une substitution linéaire $z = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$ qui changeait $\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ en $\frac{dy}{-\sqrt{Y}}$, où le polynome $Y = 4y^3 - g_2 y - g_3$ est formé avec les invariants fondamentaux de la forme $R(z)$; les coefficients α, β, γ, δ de la substitution linéaire sont des fonctions rationnelles des coefficients de $R(z)$ et d'une des racines de ce polynome. Chercher une solution z de l'équation (a) qui, pour une valeur de u arbitrairement choisie $u = u_0$, se réduise à une valeur donnée z_0, tandis que sa dérivée z' se réduit à une détermination donnée z'_0 de $\sqrt{R(z_0)}$, revient donc à trouver une solution y de l'équation

$$(b) \qquad \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3,$$

qui pour $u = u_0$ se réduise à la valeur y_0 correspondant à z_0, tandis que sa dérivée y' se réduit à $y'_0 = -\sqrt{Y_0}$, la détermination de $\sqrt{Y_0}$ résultant de la détermination de $\sqrt{R(z_0)}$, comme il a été expliqué au n° 598. Or, la fonction $pu = p(u; g_2, g_3)$ étant construite, on pourra déterminer un nombre v_0 tel que l'on ait $pv_0 = y_0$, $p'v_0 = y'_0$; la fonction $y = p(u - u_0 + v_0)$ vérifiera l'équation (b) et satisfera aux conditions imposées : donc la fonction

$$z = \frac{\alpha p(u - u_0 + v_0) + \beta}{\gamma p(u - u_0 + v_0) + \delta}$$

vérifiera l'équation (a); pour $u = u_0$, elle se réduira à z_0, tandis que sa dérivée se réduira à z'_0; c'est évidemment la seule fonction analytique qui satisfasse à ces diverses conditions, lesquelles déterminent les valeurs pour $u = u_0$ de toutes les dérivées de z. D'ailleurs, y_0 et y'_0 s'expriment rationnellement au moyen de z_0, z'_0 et de α, β, γ, δ. Le théorème d'addition de la fonction p montre, dès lors, que z s'exprime rationnellement au moyen de $p(u - u_0)$, $p'(u - u_0)$, z_0, z'_0 et de α, β, δ, γ ou de $a_0, \ldots, a_4$ et d'une racine de $R(z)$; mais, quelle que soit cette racine, le résultat doit être le même; l'expression finale de z doit donc, en vertu de la théorie des fonctions symétriques, être rationnelle en $p(u - u_0)$, $p'(u - u_0)$, z_0, z'_0, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4; il en est évidemment de même pour z'. Cette conclusion apparaîtra directement

sur la méthode d'intégration de l'équation (a) qu'il nous reste à développer, méthode qui mettra aussi en évidence ce fait que $p(u-u_0)$, $p'(u-u_0)$ s'expriment rationnellement au moyen de z, z', z_0, z'_0, a_0, ..., a_4, en sorte que les substitutions qui expriment z et z' en fonction de $p(u-u_0)$, $p'(u-u_0)$ sont des substitutions *birationnelles*.

Nous nous bornerons au cas où a_0 est différent de o; car, dans le cas où a_0 est nul, la substitution *entière* du n° 598 fournit aisément les substitutions birationnelles cherchées.

633. Ayant choisi arbitrairement une détermination de $\sqrt{a_0}$, on pose $z = \frac{1}{\sqrt{a_0}}y - \frac{a_1}{a_0}$, afin de ramener l'équation (a) à la forme

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = y^4 + 6B_2y^2 + 4B_3y + B_4,$$

dans laquelle B_2, B_3, B_4 sont donnés par les formules

$$B_2 = \frac{a_0a_2 - a_1^2}{a_0}, \qquad B_3 = \frac{2a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3}{a_0\sqrt{a_0}},$$

$$B_4 = \frac{-3a_1^4 + 6a_0a_1^2a_2 - 4a_0^2a_1a_3 + a_0^3a_4}{a_0^2}.$$

L'équation différentielle en y est de la même forme que l'équation

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = y^4 - 6y^2pa + 4yp'a + 9p^2a - 2p''a,$$

que l'on a obtenue au n° 430 et où a est une constante.

En identifiant les deux seconds membres on obtient les trois équations

$$B_2 = -pa, \qquad B_3 = p'a, \qquad B_4 = 9p^2a - 2p''a = 6p^2a + g_2.$$

Si entre ces trois équations et la relation $p'^2a = 4p^3a - g_2pa - g_3$ on élimine d'abord pa et $p'a$, on obtient pour les invariants g_2, g_3 de la fonction p les valeurs $B_4 + 3B_2^2$, $B_2B_4 - B_2^3 - B_3^2$ qui, comme on s'en assure aisément en remplaçant B_2, B_3, B_4 par leurs expressions en fonction de a_0, ..., a_4, coïncident avec les expressions (CXLIII$_1$) des invariants fondamentaux de la forme $R(z)$. Les

deux équations

$$(\text{CXLIII}_2)\quad pa = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0}, \qquad p'a = \frac{2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3}{a_0\sqrt{a_0}},$$

montrent ensuite que la constante a est déterminée, à des multiples près des périodes $2\omega_1, 2\omega_3$.

De ce que la fonction (n° 450)

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'a}{pu - pa}$$

vérifie l'équation différentielle en y, il résulte donc que l'équation (α) admet la solution

$$(\text{CXLIII}_3)\quad \left\{\begin{aligned} z &= \frac{1}{2\sqrt{a_0}}\,\frac{p'u - p'a}{pu - pa} - \frac{a_1}{a_0} = -\frac{1}{\sqrt{a_0}}[\zeta u + \zeta a - \zeta(u+a)] - \frac{a_1}{a_0} \\ &= \frac{\sqrt{a_0}\,p'u - 2a_1 pa + a_1 a_2 - a_0 a_3}{2a_0 pu + 2(a_0 a_2 - a_1^2)}, \end{aligned}\right.$$

où les invariants g_2, g_3 de p sont les invariants fondamentaux (CXLIII_1) de $R(z)$. On en déduit facilement, en utilisant la formule d'addition (CIII_5), la relation [1]

$$(\text{CXLIII}_5)\qquad \tfrac{1}{24}R''(z) = a_0 z^2 + 2a_1 z + a_2 = pu + p(u+a).$$

L'expression de z' s'obtient aisément en différentiant la seconde

---

[1] Ainsi qu'on l'a dit au n° 616, les formules (CXLIII) permettent de ramener une intégrale elliptique quelconque à une intégrale portant sur une fonction doublement périodique. Lorsque le chemin d'intégration est donné pour la variable z de l'intégrale elliptique, les difficultés relatives à la détermination du chemin correspondant pour la variable u de la fonction doublement périodique, se retrouvent naturellement, dans le cas général, quand on emploie la substitution (CXLIII_3); toutefois ces difficultés disparaissent quand tout est réel, coefficients et variables. D'ailleurs la méthode actuelle offre cet avantage de ne pas exiger la résolution préalable de l'équation $R(z) = 0$; à la vérité cette résolution devient nécessaire quand on veut effectuer les calculs *numériques*, ne fût-ce que le calcul des périodes; mais les expressions auxquelles on parvient pour l'intégrale elliptique, sans effectuer la résolution de l'équation du quatrième degré, peuvent être suffisantes, et, d'un autre côté, il est bon de rejeter à la fin tous les calculs numériques, de manière à mieux se rendre compte du degré d'approximation.

Signalons l'application de cette méthode aux intégrales du type $\displaystyle\int \frac{z^p}{\sqrt{R(z)}}\,dz$,

expression (CXLIII$_3$) de z et en utilisant encore la formule d'addition (CIII$_5$). On trouve ainsi [1]

$$z' = \frac{1}{\sqrt{a_0}}[pu - p(u+a)] = \frac{1}{\sqrt{a_0}}\left[2pu + pa - \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'a}{pu - pa}\right)^2\right],$$

d'où, en tenant compte de la formule (CXLIII$_5$),

$$(\text{CXLIII}_4) \qquad z' = \frac{1}{\sqrt{a_0}}(2pu - a_0 z^2 - 2a_1 z - a_2).$$

La troisième expression (CXLIII$_3$) de z est rationnelle en pu, $p'u$, $\sqrt{a_0}$, a_1, a_2, a_3, a_4; la dérivée z' peut donc s'obtenir sous la même forme. D'autre part, l'équation (CXLIII$_4$) montre que pu s'exprime rationnellement au moyen de z, z', $\sqrt{a_0}$, a_1, ..., et l'équation (CXLIII$_3$), résolue par rapport à $p'u$, montre que $p'u$ s'exprime aussi rationnellement au moyen de z, z', $\sqrt{a_0}$, a_1, ... Si donc on se donne deux valeurs concordantes z_0, z'_0 de z on peut

---

où p est un nombre entier positif que l'on peut supposer être égal à 0, 1, 2 (n° 619). La substitution (CXLIII$_3$) donne de suite

$$\int \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} = c - \left(\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{\sqrt{a_0}}\zeta a\right)u + \frac{1}{\sqrt{a_0}}\log\frac{\sigma(u+a)}{\sigma u},$$

où c est une constante arbitraire; la relation (CXLIII$_5$) donne ensuite la suivante

$$\int \frac{a_0 z^2 + 2a_1 z + a_2}{\sqrt{R(z)}}\,dz = c - \zeta(u+a) - \zeta u,$$

où c est une constante arbitraire, et qui permet d'obtenir $\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{R(z)}}$. Les intégrales du type $\int \frac{z^p\,dz}{\sqrt{R(z)}}$, où p est un entier négatif, se ramènent d'ailleurs, par le changement de z en $\frac{1}{z}$, à des intégrales du même type, où p est positif, mais où $R(z)$ est remplacé par un autre polynome $R_1(z)$ ayant les mêmes invariants que $R(z)$.

C'est par cette voie que l'on a obtenu les formules (CXLIV).

[1] Les valeurs de u qui annulent z' apparaissent immédiatement sur la première des expressions de cette fonction : elles sont congrues (*modulis* $2\omega_1$, $2\omega_3$) à $-\frac{a}{2}$, $-\frac{a}{2}+\omega_1$, $-\frac{a}{2}+\omega_2$, $-\frac{a}{2}+\omega_3$; en remplaçant, dans l'expression de z, u par ces quatre valeurs, on obtient les quatre racines de l'équation $R(z) = 0$. C'est la résolution, au moyen des fonctions elliptiques, de l'équation du quatrième degré.

déterminer, à des multiples près des périodes, la valeur correspondante v_0 de u qui vérifie les équations (CXLIII_{3-4}) et les expressions de $p v_0$, $p' v_0$ seront rationnelles en z_0, z'_0, $\sqrt{a_0}$, a_1, ... Cette valeur étant déterminée, si l'on remplace dans les équations (CXLIII_{3-4}), u par $u - u_0 + v_0$, on obtient manifestement, pour z, une solution de l'équation (a) qui, pour $u = u_0$, se réduit à z_0, tandis que sa dérivée se réduit à z'_0; cette solution est la seule fonction analytique qui satisfasse à ces conditions.

En appliquant à $p(u - u_0 + v_0)$ le théorème d'addition, on voit que la fonction z ainsi obtenue s'exprime rationnellement (ainsi que sa dérivée) au moyen de $p(u - u_0)$, $p'(u - u_0)$, z_0, z'_0, $\sqrt{a_0}$, a_1, ... On voit de même, en considérant successivement les équations (CXLIII_4) et (CXLIII_3), que $p(u - u_0 + v_0)$, $p'(u - u_0 + v_0)$ et, par suite, $p(u - u_0)$, $p'(u - u_0)$ s'expriment rationnellement au moyen de z, z', z_0, z'_0, $\sqrt{a_0}$, a_1, ... On voit encore que l'irrationnelle $\sqrt{a_0}$ doit disparaître des résultats qui ne peuvent changer quand on y remplace $\sqrt{a_0}$ par $-\sqrt{a_0}$. Les substitutions qui permettent d'exprimer z et z' en fonction de $p(u - u_0)$, $p'(u - u_0)$, sont donc des substitutions *birationnelles,* comme on l'avait annoncé.

634. On obtiendra les résultats finaux sous une forme élégante, due à Weierstrass, en procédant comme il suit :

En reprenant les notations du n° 631, faisons, dans l'équation différentielle (a),

$$z = \frac{\lambda_1 Z + \mu_1}{\lambda_2 Z + \mu_2}, \qquad \frac{dz}{du} = \frac{\delta}{(\lambda_2 Z + \mu_2)^2}\,\frac{dZ}{du};$$

elle deviendra

$$\text{(A)} \qquad \left(\frac{dZ}{du}\right)^2 = \frac{A_0}{\delta^2} Z^4 + 4\,\frac{A_1}{\delta^2} Z^3 + 6\,\frac{A_2}{\delta^2} Z^2 + 4\,\frac{A_3}{\delta^2} Z + \frac{A_4}{\delta^2}.$$

C'est une équation du même type que l'équation (a). On voit de suite que les invariants fondamentaux du polynome du quatrième degré qui constitue le second membre de cette équation sont les mêmes quantités g_2 et g_3 que pour $R(z)$. Il en résulte qu'elle admet la solution

$$\text{(C)} \qquad Z = \frac{\delta^3 \sqrt{A_0}\, p' u - 2\delta^2 A_1 p u + A_1 A_2 - A_0 A_3}{2\delta^2 A_0 p u + 2(A_0 A_2 - A_1^2)},$$

où les invariants g_2, g_3 de la fonction pu sont encore les invariants fondamentaux de la fonction $R(z)$. Il en résulte aussi que la dérivée de Z est donnée par la formule, analogue à la formule (CXLIII_4),

$$\text{(D)} \qquad \frac{dZ}{du} = \frac{1}{\delta\sqrt{A_0}}(2\delta^2 pu - A_0 Z^2 - 2A_1 Z - A_2).$$

On obtient une solution z de l'équation (a) et la valeur correspondante de $\frac{dz}{du}$ en remplaçant, dans $\frac{\lambda_1 Z + \mu_1}{\lambda_2 Z + \mu_2}$, Z par la valeur que définit l'équation (C), et, dans l'équation (D), Z par $\frac{-\mu_2 z + \mu_1}{\lambda_2 z - \lambda_1}$, $\frac{dZ}{du}$ par $\frac{\delta}{(\lambda_2 z - \lambda_1)^2}\frac{dz}{du}$: on trouve ainsi

$$\sqrt{A_0}\,\frac{dz}{du} = 2(\lambda_2 z - \lambda_1)^2 pu - \frac{1}{\delta^2}(C_0 z^2 + 2C_1 z + C_2),$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
C_0 &= A_0\mu_2^2 - 2A_1\lambda_2\mu_2 + A_2\lambda_2^2,\\
C_1 &= -A_0\mu_1\mu_2 + A_1(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) - A_2\lambda_1\lambda_2,\\
C_2 &= A_0\mu_1^2 - 2A_1\lambda_1\mu_1 + A_2\lambda_1^2.
\end{aligned}$$

Si, dans les seconds membres, on remplace A_0, A_1, A_2 par leurs valeurs

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{12}\left(\lambda_1^2 R''_{\lambda_1^2} + 2\lambda_1\lambda_2 R''_{\lambda_1\lambda_2} + \lambda_2^2 R''_{\lambda_2^2}\right),\\
A_1 &= \frac{1}{12}\left[\lambda_1\mu_1 R''_{\lambda_1^2} + (\mu_1\lambda_2 + \mu_2\lambda_1) R''_{\lambda_1\lambda_2} + \lambda_2\mu_2 R''_{\lambda_2^2}\right],\\
A_2 &= \frac{1}{12}\left(\mu_1^2 R''_{\lambda_1^2} + 2\mu_1\mu_2 R''_{\lambda_1\lambda_2} + \mu_2^2 R''_{\lambda_2^2}\right),
\end{aligned}$$

on trouve immédiatement

$$C_0 = \frac{\delta^2}{12} R''_{\lambda_1^2}, \qquad C_1 = \frac{\delta^2}{12} R''_{\lambda_1\lambda_2}, \qquad C_2 = \frac{\delta^2}{12} R''_{\lambda_2^2},$$

en sorte que l'équation (D) peut s'écrire sous la forme

$$(d) \qquad \sqrt{A_0}\,\frac{dz}{du} = 2(\lambda_2 z - \lambda_1)^2 pu - \frac{1}{12}\left(R''_{\lambda_1^2} z^2 + 2R''_{\lambda_1\lambda_2} z + R''_{\lambda_2^2}\right),$$

qui montre, comme l'équation (CXLIII_4), que pu s'exprime rationnellement au moyen de z, z'.

En écrivant que l'expression de $\frac{dz}{du}$ ainsi obtenue vérifie l'équation (a), en se rappelant que l'on a $A_0 = R(\lambda_1, \lambda_2)$, en utilisant enfin l'identité du n° 631, où l'on remplace z_1 par z, z_2 par 1, on trouve de suite la relation

$$
(\mathrm{F}) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{12}\left(H''_{\lambda_1^2} z^2 + 2H''_{\lambda_1\lambda_2} z + H''_{\lambda_2^2}\right) + \frac{1}{12} g_2(\lambda_2 z - \lambda_1)^2 \\ & \qquad - (\lambda_2 z - \lambda_1)^2 y^2 + \frac{1}{12}\left(R''_{\lambda_1^2} z^2 + 2R''_{\lambda_1\lambda_2} z + R''_{\lambda_2^2}\right) y = 0, \end{aligned} \right.
$$

où y a été mis à la place de pu. C'est la relation du second degré en y et z qui doit (n° 441) exister entre ces deux fonctions doublement périodiques du second ordre. Nous en représenterons le premier membre par

$$
F(z, y) = Az^2 + Bz + C = \alpha y^2 + \beta y + \gamma,
$$

où A, B, C sont des polynomes du second degré en y et α, β, γ des polynomes du second degré en z; les expressions explicites de ces polynomes résultent de l'équation (F).

Les notations précédentes permettent d'écrire l'équation (d) sous la forme

$$
\sqrt{A_0}\, z' = -(2\alpha y + \beta);
$$

d'ailleurs, en différentiant l'équation (F), on trouve de suite

$$
(2Az + B) z' + (2\alpha y + \beta) y' = 0;
$$

on en conclut, par l'élimination de z',

$$
z = \frac{-B + \sqrt{A_0}\, y'}{2A}.
$$

Cette valeur de z est nécessairement l'une des racines de l'équation (F), considérée comme une équation du second degré en z; l'autre racine serait $\frac{-B - \sqrt{A_0}\, y'}{2A}$.

L'expression $\frac{-B + \sqrt{A_0}\, y'}{2A}$ ne peut différer de celle qu'on aurait obtenue en remplaçant, dans $\frac{\lambda_1 Z + \mu_1}{\lambda_2 Z + \mu_2}$, Z par la valeur que donne l'équation (C); cette dernière valeur permet d'obtenir simplement les valeurs de z, z' pour $u = 0$; en effet, si, dans le second membre

de (C), on suppose pu, $p'u$ remplacés par leurs développements en série suivant les puissances ascendantes de u, que l'on substitue le résultat dans $\frac{\lambda_1 Z + \mu_1}{\lambda_2 Z + \mu_2}$, que l'on ordonne, enfin, suivant les puissances ascendantes de u, on trouve pour les premiers termes

$$z = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\sqrt{A_0}}{\lambda_2^2} u + \ldots;$$

pour $u = 0$, z et z' se réduisent donc respectivement à $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\frac{\sqrt{A_0}}{\lambda_2^2}$.

Ainsi $\frac{-B + \sqrt{A_0}\, y'}{2A_0}$ est la solution de l'équation (a) qui, pour $u = 0$, se réduit à $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, tandis que sa dérivée se réduit à $\frac{\sqrt{A_0}}{\lambda_2^2}$.

635. Si, maintenant, dans les calculs précédents, on suppose u remplacé par $u - u_0$, en sorte que y, y' désignent non plus pu, $p'u$, mais bien $p(u - u_0)$, $p'(u - u_0)$; si l'on désigne ensuite par z_0, z'_0 les valeurs auxquelles on veut que se réduisent, pour $u = u_0$, la solution z de l'équation (a) et sa dérivée z'; si l'on pose $\lambda_1 = z_0$, $\lambda_2 = 1$; si l'on choisit pour $\sqrt{A_0} = \sqrt{R(z_0)}$ la détermination qui est égale à z'_0; si l'on désigne par $r(z, z_0)$, $h(z, z_0)$, ce que deviennent, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, les quantités

$$\frac{1}{12}\left(R''_{\lambda_1^2} z^2 + 2R''_{\lambda_1\lambda_2} z + R''_{\lambda_2^2}\right),$$

$$\frac{1}{12}\left(H''_{\lambda_1^2} z^2 + 2H''_{\lambda_1\lambda_2} z + H''_{\lambda_2^2}\right),$$

qui figurent dans l'équation (F), ce qui revient à poser

$$(1)\quad \begin{cases} r(z, z_0) = a_0 z_0^2 z^2 + 2a_1 z_0 z(z + z_0) + a_2(z^2 + 4z_0 z + z_0^2) \\ \qquad\qquad + 2a_3(z_0 + z) + a_4, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} h(z, z_0) = (a_0 a_2 - a_1^2) z_0^2 z^2 + \frac{1}{2}(a_0 a_3 - a_1 a_2) z_0 z(z_0 + z) \\ \qquad + \frac{1}{6}(a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 2a_2^2)(z^2 + 4z_0 z + z_0^2) \\ \qquad + \frac{1}{2}(a_1 a_4 - a_2 a_3)(z_0 + z) + (a_2 a_4 - a_3^2), \end{cases}$$

en sorte que la relation (F) du second degré entre z et

$y = \wp(u - u_0)$ prenne la forme

$$(3)\quad F(z, z_0, y) = h(z, z_0) + \frac{1}{12} g_2(z - z_0)^2 - (z - z_0)^2 y^2 + r(z, z_0) y = 0;$$

si, enfin, on conserve les notations $Az^2 + Bz + C$, $\alpha y^2 + \beta y + \gamma$ pour en désigner le premier membre, la fonction

$$(4)\qquad z = \frac{-B + \sqrt{A_0}\,y'}{2A} = \frac{-B + z'_0\,\wp'(u - u_0)}{2A}$$

est la solution de l'équation différentielle (a) qui, pour $u = u_0$, se réduit à z_0, tandis que sa dérivée se réduit à z'_0 (1).

L'équation (d), en tenant compte des notations actuelles, montre que l'on a (2)

$$(5)\qquad y = \wp(u - u_0) = \frac{z'_0 z' + r(z, z_0)}{2(z - z_0)^2};$$

c'est la racine de l'équation $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ qui devient infinie pour $z = z_0$; l'autre racine de cette même équation est $\dfrac{-z'_0 z' + r(z, z_0)}{2(z - z_0)^2}$; pour $z = z_0$ elle se réduit à $-\dfrac{H(z_0)}{R(z_0)}$, comme on le voit en faisant $z = z_0$ dans l'équation $F(z, z_0, y) = 0$.

636. Soit $f(u)$ une fonction analytique univoque qui vérifie l'équation (a); ce sera, d'après ce qu'on vient de voir, une fonction doublement périodique du second ordre. Il est clair, d'après l'analyse précédente, que l'on satisfera aux équations

$$F[z, z_0, \wp(u - u_0)] = 0,$$

$$z = \frac{-B + z'_0\,\wp'(u - u_0)}{2A}, \qquad \wp(u - u_0) = \frac{z'_0 z' + r(z, z_0)}{2(z - z_0)^2},$$

en supposant

$$z = f(u), \qquad z_0 = f(u_0), \qquad z' = f'(u), \qquad z'_0 = f'(u_0),$$

et cela quels que soient u et u_0. Il ne faut pas oublier que A, B, C

---

(1) Notons, en passant, les circonstances suivantes : μ_1, μ_2 n'interviennent pas dans les résultats; $r(z, z_0)$, $h(z, z_0)$, pour $z = z_0$, se réduisent à $R(z_0)$, $H(z_0)$; $F(z, z_0, y)$ est symétrique en z, z_0.

(2) Cette relation est due à Weierstrass; on en déduit immédiatement l'expression de $\wp'(u - u_0)$ en fonction rationnelle de z et de z'.

sont des fonctions entières de z_0 et de y, où il faut supposer que z_0 est remplacé par $f(u_0)$ et y par $p(u-u_0)$; dans ce qui suit, nous supposerons de même que, dans α, β, γ, on a remplacé z, z_0 par $f(u)$, $f(u_0)$.

La seconde racine

$$z_1 = \frac{-B - f'(u_0)\,p'(u-u_0)}{2A}$$

de l'équation $Az^2 + Bz + C = 0$ n'est autre chose que $f(2u_0 - u)$, puisque cette dernière fonction satisfait à l'équation différentielle (a) et, pour $u = u_0$, se réduit à $f(u_0)$, tandis que sa dérivée se réduit à $-f'(u_0)$; on en conclut

$$f(u) + f(2u_0 - u) = -\frac{B}{A}, \qquad f(u)f(2u_0 - u) = \frac{C}{A};$$

les seconds membres sont des fonctions rationnelles de $f(u_0)$, $p(u-u_0)$.

De même

$$p(u-u_0) = \frac{f'(u_0)f'(u) + r[f(u_0), f(u)]}{2[f(u) - f(u_0)]^2}$$

est une racine de l'équation en y, $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$. Si, dans l'égalité qui précède, on change, en désignant par a, b les pôles de $f(u)$, u_0 en $a+b-u_0$, on a

$$p(u+u_0-a-b) = \frac{-f'(u_0)f'(u) + r[f(u_0), f(u)]}{2[f(u) - f(u_0)]^2},$$

puisque l'on a (n° 433)

$$f(a+b-u_0) = f(u_0), \qquad \frac{df(a+b-u_0)}{du_0} = -f'(u_0);$$

$p(u+u_0-a-b)$ est donc la seconde racine de l'équation $\alpha y^2 + \beta y + \gamma$. Puisque, pour $u = u_0$, elle se réduit à $-\dfrac{H(z_0)}{R(z_0)}$, on voit [1] que l'on a

$$p(2u-a-b) = -\frac{H[f(u)]}{R[f(u)]}.$$

En supposant $u_0 = 0$ dans les formules (1-5) du numéro précédent, on obtient l'expression rationnelle de $f(u)$ au moyen de pu,

---

[1] HERMITE, *Journal de Crelle*, t. 52.

$p'u$, la relation algébrique entière du second degré entre $f(u)$ et pu, l'expression rationnelle de pu au moyen de $f(u)$, $f'(u)$ et l'on pourra en déduire l'expression rationnelle, au moyen de $f(u)$, $f'(u)$, de toute fonction doublement périodique ayant les mêmes périodes que $f(u)$ (n° 435).

L'équation (4), en y remplaçant u par $u + u_0$, jointe à l'équation (5) elle-même, fournit, au moyen des formules (CIII), diverses formes du théorème d'addition de la fonction $f(u)$. Le lecteur pourra multiplier les applications en prenant pour le polynome du quatrième degré (ou du troisième degré), $R(z)$ les polynomes qui conviennent aux fonctions p, ξ, sn, ...

637. Regardant toujours z, z_0, z', z'_0 comme représentant $f(u)$, $f(u_0)$, $f'(u)$ $f'(u_0)$, puis u et u_0 comme des variables liées par la relation $u - u_0 = c$, où c est une constante, les relations

$$du = du_0, \qquad dz = f'(u)\,du, \qquad dz_0 = f'(u_0)\,du_0$$

fournissent immédiatement celles-ci :

$$\frac{dz}{f'(u)} = \frac{dz_0}{f'(u_0)}, \qquad \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{dz_0}{\sqrt{R(z_0)}},$$

où $\sqrt{R(z)}$, $\sqrt{R(z_0)}$ désignent les déterminations des radicaux qui sont égales à $f'(u)$, $f'(u_0)$.

On a, d'ailleurs,

$$F(z, z_0, pc) = 0, \qquad pc = \frac{\sqrt{R(z)}\sqrt{R(z_0)} + r(z, z_0)}{2(z - z_0)^2}.$$

Ces relations, où pc joue le rôle de constante arbitraire, peuvent être regardées comme des formes différentes de l'intégrale générale de l'*équation différentielle d'Euler*

$$\frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{dz_0}{\sqrt{R(z_0)}};$$

cette intégrale, que l'on peut aussi regarder comme obtenue par l'élimination de u_0 entre les équations transcendantes

$$z = f(u_0 + c), \qquad z_0 = f(u_0),$$

est *algébrique*.

CHAPITRE XII.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

638. Si l'on considère en général une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qu'on puisse regarder comme homogène et de degré ν quand on regarde ces variables comme étant respectivement des degrés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, c'est-à-dire pour laquelle on ait, quel que soit λ,

$$(a) \qquad \lambda^\nu f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\lambda^{\alpha_1} x_1, \lambda^{\alpha_2} x_2, \ldots, \lambda^{\alpha_n} x_n),$$

on aura, par une généralisation aisée d'un théorème classique,

$$(b) \qquad \nu f = \alpha_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_n x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Les expressions de g_2, g_3, $\mathcal{G}$, η_α, e_α, ... au moyen de ω_1, ω_3, montrent que, si l'on regarde ω_1, ω_3 comme du premier degré, les quantités énumérées sont homogènes avec les degrés respectifs $-4, -6, -12, -1, -2, \ldots$; elles conserveront ce même caractère, comme aussi leurs degrés respectifs, si, au lieu de les regarder comme des fonctions de ω_1, ω_3 on les regarde comme des fonctions de g_2, g_3, pourvu que l'on regarde ces dernières variables comme ayant les degrés -4, -6; c'est ce que nous ferons dans la suite. Dans ces mêmes conditions, si l'on regarde la variable u comme étant du premier degré, les fonctions

$$\sigma(u; g_2, g_3), \quad \zeta(u; g_2, g_3), \quad p(u; g_2, g_3), \quad \sigma_\alpha, \quad \xi_{0\alpha}, \quad \xi_{\alpha\beta}, \quad \ldots$$

sont homogènes (¹) et des degrés respectifs $1, -1, -2, 0, 1, 0, \ldots$.

(¹) Dans les fonctions $\mathfrak{I}(v)$, la variable $v = \dfrac{u}{2\omega_1}$ doit être regardée comme étant du degré 0; les fonctions elles-mêmes, envisagées au point de vue où nous

Pour les trois premières fonctions, par exemple, les équations $(\mathrm{VIII}_{1,2,3})$ appartiennent au type (a); il en résulte qu'elles vérifient des équations aux dérivées partielles (b) que nous nous dispensons d'écrire.

Si nous considérons deux fonctions φ et ψ des seules quantités g_2, g_3, qui soient homogènes et du degré o, ces fonctions ne dépendent au fond que d'une seule variable, et, par conséquent, l'une quelconque d'entre elles peut être regardée comme une fonction de l'autre. Tel sera le cas pour deux quelconques des fonctions k, k', τ, q, $\mathfrak{S}(0)$, $\mathrm{J}(\tau)$, K, K', ... La dérivée de φ, regardée comme fonction de ψ, sera évidemment donnée par les formules

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{\partial\varphi}{\partial g_2} : \frac{\partial\psi}{\partial g_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial g_3} : \frac{\partial\psi}{\partial g_3}.$$

639. Nous allons montrer, d'après Weierstrass [1], que la fonction $\sigma(u;\, g_2, g_3)$ vérifie une autre équation aux dérivées partielles que celle qui résulte de l'homogénéité. Dans ce qui suit, pour abréger l'écriture, nous écrirons σ, ζ, p, p', ... au lieu de $\sigma(u; g_2, g_3)$, $\zeta(u; g_2, g_3)$, $p(u; g_2, g_3)$, $\dfrac{\partial p(u;\, g_2, g_3)}{\partial u}$, ... et nous continuerons d'employer les accents pour désigner les dérivées par rapport à u.

En égalant les dérivées partielles, par rapport à g_2, g_3 des deux membres de l'équation $p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3$, on trouve de suite les relations

$$2p'\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial g_2} = (12p^2 - g_2)\frac{\partial p}{\partial g_2} - p = 2p''\frac{\partial p}{\partial g_2} - p,$$

$$2p'\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial g_3} = (12p^2 - g_2)\frac{\partial p}{\partial g_3} - 1 = 2p''\frac{\partial p}{\partial g_3} - 1,$$

qui fournissent aisément les suivantes

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{p'}\frac{\partial p}{\partial g_2}\right] = -\frac{1}{2}\frac{p}{p'^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{p'}\frac{\partial p}{\partial g_3}\right] = -\frac{1}{2}\frac{1}{p'^2};$$

en remarquant ensuite que la dérivée $-\dfrac{p''}{p'^2}$ de $\dfrac{1}{p'}$ peut s'écrire

---

nous plaçons, sont du degré o. De même, les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, où la variable ne désigne pas le même u qui figure dans pu, mais bien cette dernière variable u divisée par $\sqrt{e_1 - e_3}$.

[1] *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1882; p. 443.

$\frac{g_2}{2}\frac{1}{p'^2} - 6\frac{p^2}{p'^2}$, où l'on peut remplacer $\frac{1}{p'^2}$ par sa valeur tirée de la dernière des équations précédentes, on voit que l'on peut écrire les trois égalités

$$\frac{1}{p'^2} = -2\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{p'}\frac{\partial p}{\partial g_3}\right], \qquad \frac{p}{p'^2} = -2\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{p'}\frac{\partial p}{\partial g_2}\right],$$

$$\frac{p^2}{p'^2} = -\frac{g_2}{6}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{p'}\frac{\partial p}{\partial g_3}\right] - \frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{p'}\right].$$

Si donc on considère une expression quelconque de la forme $\frac{1}{p'^2}f(p)$, où $f(p)$ est un polynome en p, on voit, en supposant effectuée la division de $f(p)$ par $4p^3 - g_2 p - g_3$ et en se rappelant que les puissances entières et positives de p sont des fonctions linéaires de p et de ses dérivées par rapport à u (n° 411), que $\frac{1}{p'^2}f(p)$ peut se mettre sous forme d'une expression linéaire en $p, p', p'', \ldots$ et en $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{p'}\frac{\partial p}{\partial g_2}\right)$, $\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{p'}\frac{\partial p}{\partial g_3}\right]$, expression qui s'intégrera immédiatement. Nous appliquerons cette remarque à la dérivée $\frac{p'p''' - p''^2}{p'^2}$ de $\frac{p''}{p'}$; en mettant cette dérivée sous la forme $\frac{1}{p'^2}f(p)$ et en suivant la méthode précédente, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{p''}{p'} = 3p + \frac{g_2}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{p'}\right] + g_2^2\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{p'}\frac{\partial p}{\partial g_3}\right] + 18g_3\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{p'}\frac{\partial p}{\partial g_2}\right],$$

d'où, en observant que, après l'intégration, les deux membres doivent être des fonctions impaires de u, en sorte que l'intégration n'introduit pas de constante, on déduit, après avoir multiplié par p',

$$(1)\qquad p'' = -3p'\zeta + \frac{g_2}{2} + g_2^2\frac{\partial p}{\partial g_3} + 18g_3\frac{\partial p}{\partial g_2}.$$

On intégrera une seconde fois, en appliquant au terme $p'\zeta$ du second membre la règle d'intégration par parties, ou plutôt en se servant de l'identité

$$(p\zeta)' = p'\zeta + p\zeta' = p'\zeta - p^2 = p'\zeta - \frac{1}{6}p'' - \frac{g_2}{12},$$

et l'on trouvera, après des réductions immédiates,

$$(2)\qquad \frac{3}{2}p' = -3p\zeta + \frac{g_2}{4}u - g_2^2\frac{\partial\zeta}{\partial g_3} - 18g_3\frac{\partial\zeta}{\partial g_2};$$

on n'a pas fait figurer de constante pour la même raison que tout à l'heure. En intégrant encore une fois, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\,p &= \frac{3}{2}\zeta^2 + \frac{g_2}{8}u^2 - g_2^2\frac{\partial \log\sigma}{\partial g_3} - 18g_3\frac{\partial\log\sigma}{\partial g_2}\\ &= \frac{3}{2}\zeta^2 + \frac{g_2}{8}u^2 - g_2^2\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial g_3} - 18g_3\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial g_2},\end{aligned}$$

l'absence de constante résultant cette fois de ce que dans les deux membres, développés suivant les puissances de u, il ne doit pas y avoir de terme indépendant de u. Finalement, à cause de la relation $-p+\zeta^2 = \frac{\sigma''}{\sigma}$, on arrive à l'équation aux dérivées partielles

$$\text{(XCII)}\qquad \frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} - \frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\sigma}{\partial g_3} - 12g_3\frac{\partial\sigma}{\partial g_2} + \frac{g_2}{12}u^2\sigma = 0$$

qui était notre objet principal.

640. En remplaçant, dans cette équation, σ par $\sigma_\alpha(p-e_\alpha)^{-\frac{1}{2}}$, on formera une équation aux dérivées partielles que vérifiera σ_α, à savoir

$$\text{(XCIII)}\qquad \frac{\partial^2\sigma_\alpha}{\partial u^2} - \frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial g_3} - 12g_3\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial g_2} + \left(e_\alpha + \frac{g_2}{12}u^2\right)\sigma_\alpha = 0.$$

Pour y parvenir, on calculera d'abord la dérivée seconde, par rapport à u, de $\sigma_\alpha = \sqrt{p-e_\alpha}\,\sigma$; on trouvera de suite

$$\sqrt{p-e_\alpha}\,\sigma'' - \sigma''_\alpha = -\frac{p'\sigma'_\alpha}{p-e_\alpha} + \left[\frac{3}{4}\frac{p'^2}{(p-e_\alpha)^2} - \frac{1}{2}\frac{p''}{p-e_\alpha}\right]\sigma_\alpha;$$

on a besoin de calculer aussi ce que devient, par la substitution $\sigma = \sigma_\alpha(p-e_\alpha)^{-\frac{1}{2}}$, la quantité $\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\sigma}{\partial g_3} + 12g_3\frac{\partial\sigma}{\partial g_2}$; cette quantité, multipliée par $\sqrt{p-e_\alpha}$, est égale à

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial g_3} + 12g_3\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial g_2} - \frac{\sigma_\alpha}{2(p-e_\alpha)}\left[\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial p}{\partial g_3} + 12g_3\frac{\partial p}{\partial g_2}\right]&\\ + \frac{\sigma_\alpha}{2(p-e_\alpha)}\left[\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial e_\alpha}{\partial g_3} + 12g_3\frac{\partial e_\alpha}{\partial g_2}\right]&;\end{aligned}$$

la quantité $\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial p}{\partial g_2} + 12g_3\frac{\partial p}{\partial g_3}$ figure dans l'équation (1); elle est

égale à $\frac{2}{3}\,p'' + 2p'\zeta - \frac{g_2}{3}$; les relations

$$(\text{CXLV}_1) \qquad \frac{\partial e_\alpha}{\partial g_2} = \frac{e_\alpha}{12 e_\alpha^2 - g_2}, \qquad \frac{\partial e_\alpha}{\partial g_3} = \frac{1}{12 e_\alpha^2 - g_2},$$

se déduisent aisément de l'équation $4e_\alpha^3 - g_2 e_\alpha - g_3 = 0$, et un calcul facile donne (¹)

$$\frac{2}{3}\,g_2^2\,\frac{\partial e_\alpha}{\partial g_3} + 12 g_3\,\frac{\partial e_\alpha}{\partial g_2} = \frac{2}{3}\,\frac{g_2^2 + 18 e_\alpha g_3}{12 e_\alpha^2 - g_2} = \frac{2}{3}(6e_\alpha^2 - g_2);$$

on n'a plus qu'à substituer, dans le premier membre de l'équation (XCII) du numéro précédent, préalablement multiplié par $\sqrt{p - e_\alpha}$, les quantités

$$\sigma''\sqrt{p - e_\alpha}, \qquad \left(\frac{2}{3}\,g_2^2\,\frac{\partial \sigma}{\partial g_3} + 12 g_3\,\frac{\partial \sigma}{\partial g_2}\right)\sqrt{p - e_\alpha},$$

par leurs valeurs; le résultat, si l'on remplace σ'_α par $\zeta_\alpha \sigma_\alpha$, devient une fonction linéaire de $\frac{\partial^2 \sigma_\alpha}{\partial u^2}$, $\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial g_2}$, $\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial g_3}$ et de σ_α; le coefficient de σ_α, diminué de $\frac{g_2}{12}u^2$, se présente immédiatement comme une fonction doublement périodique de u; celle-ci, si on la décompose en éléments simples, se réduit à la constante e_α; on est ainsi parvenu à l'équation annoncée.

Observons, en passant, que l'on déduit aisément des relations (CXLV₁) les suivantes

$$(\text{CXLV}_2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(k^2)}{\partial g_2} = \dfrac{(2 - k^2)(1 - 2k^2)(1 + k^2)}{12 k^2 k'^2 (e_1 - e_3)^2} = \dfrac{9}{16}\,\dfrac{g_3}{G}\,(e_1 - e_3), \\[2ex] \dfrac{\partial(k^2)}{\partial g_3} = -\dfrac{k^4 - k^2 + 1}{2k^2 k'^2 (e_1 - e_3)^3} = -\dfrac{3}{8}\,\dfrac{g_2}{G}\,(e_1 - e_3). \end{cases}$$

641. A l'équation aux dérivées partielles (XCII) que nous venons d'obtenir pour la fonction $\sigma(u; g_2, g_3)$, adjoignons l'équation du type (b)

$$\sigma = u\sigma' - 4g_2\,\frac{\partial \sigma}{\partial g_2} - 6 g_3\,\frac{\partial \sigma}{\partial g_3},$$

(¹) On voit dans tous ces calculs se présenter naturellement l'opération

$$\frac{2}{3}\,g_2^2\,\frac{\partial}{\partial g_3} + 12 g_3\,\frac{\partial}{\partial g_2};$$

Halphen a donné, dans son *Traité des Fonctions elliptiques*, t. I, p. 300, d'intéressantes remarques sur cette opération.

qui résulte de l'homogénéité, et résolvons ces deux équations par rapport à $\frac{\partial\sigma}{\partial g_2}$, $\frac{\partial\sigma}{\partial g_3}$; nous obtenons ainsi les relations (CXLVI_1). L'équation aux dérivées partielles (XCIII) obtenue au numéro précédent pour la fonction $\sigma_\alpha(u;\, g_2,\, g_3)$ et l'équation du type (b) que vérifie cette même fonction, toute pareille à celle que nous venons d'écrire pour σ, fournissent de même les relations (CXLVI_2). De même aussi, en adjoignant à chacune des équations (1), (2), l'équation aux dérivées partielles du type (b) relative soit à la fonction p, soit à la fonction ζ, nous aurons deux groupes d'équations du premier degré d'où l'on pourra tirer les dérivées par rapport à g_2, g_3 des fonctions p, ζ; le lecteur trouvera leurs expressions dans le Tableau de formules (CXLVI_{3-4}).

642. Les expressions (CXLVI_{5-7}) de $\frac{\partial\xi_{0\alpha}}{\partial g_2}$, $\frac{\partial\xi_{0\alpha}}{\partial g_3}$; $\frac{\partial\xi_{\alpha 0}}{\partial g_2}$, $\frac{\partial\xi_{\alpha 0}}{\partial g_3}$; $\frac{\partial\xi_{\beta\gamma}}{\partial g_2}$, $\frac{\partial\xi_{\beta\gamma}}{\partial g_3}$ se déduisent aisément des formules (CXLVI_{1-2}). Les formules (CXLVI_{8-9}), qui sont dues à M. Hermite ([1]), en sont une conséquence immédiate; il ne faut pas oublier toutefois, en établissant ces formules, que si l'on désigne par u l'argument des fonctions ξ, celui des fonctions sn, cn, dn est $u\sqrt{e_1 - e_3}$ et dépend donc de g_2 et de g_3.

643. Il est aisé de déduire des formules (CXLVI_{3-4}) les expressions des dérivées de ω_α, η_α par rapport à g_2, g_3. Si, en effet, dans $p'u$ et dans ζu, on remplace u par une fonction de g_2, g_3, les dérivées partielles par rapport à g_2, g_3 des fonctions ainsi obtenues seront évidemment

$$p''\frac{\partial u}{\partial g_2} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial g_2}, \quad p''\frac{\partial u}{\partial g_3} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial g_3}, \quad -p\frac{\partial u}{\partial g_2} + \frac{\partial\zeta}{\partial g_2}, \quad -p\frac{\partial u}{\partial g_3} + \frac{\partial\zeta}{\partial g_3},$$

où $\frac{\partial p}{\partial g_2}, \ldots, \frac{\partial\zeta}{\partial g_3}$ conservent le même sens que dans les équations précédentes. En supposant $u = \omega_\alpha$, en tenant compte des équations (CXLVI_{3-4}) et de ce que p, p', p'', p''', ζ se réduisent respectivement alors à e_α, o, $6e_\alpha^2 - \frac{g_2}{2}$, o, η_α, on trouve sans peine

---

([1]) *Journ. de Crelle*, t. 85, p. 248. *Voir* aussi MEYER, *Journ. de Crelle*, t. 56, p. 321.

les relations [1]

$$(\mathrm{CXLV}_3)\left\{\begin{aligned} &32\,\mathcal{G}\,\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial g_2} = 9g_3\eta_\alpha - \frac{1}{2}g_2^2\omega_\alpha, \quad 64\,\mathcal{G}\,\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial g_2} = g_2\left(g_2\eta_\alpha - \frac{3}{2}g_3\omega_\alpha\right),\\ &32\,\mathcal{G}\,\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial g_3} = 9g_3\omega_\alpha - 6\,g_2\eta_\alpha, \quad 64\,\mathcal{G}\,\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial g_3} = g_2^2\omega_\alpha - 18\,g_3\eta_\alpha.\end{aligned}\right.$$

644. On voit que ω_α, η_α, considérés soit comme des fonctions de g_2, soit comme des fonctions de g_3, vérifient un système d'équations différentielles (ordinaires) linéaires et homogènes du premier ordre. Chacune de ces quantités vérifie donc une équation différentielle (ordinaire) linéaire et homogène du second

---

[1] De ces relations et de la formule (XIII_3) on tire aisément les suivantes

$$32\,\mathcal{G}\,\frac{\partial}{\partial g_2}\,\frac{\omega_3}{i\omega_1} = -\,\frac{9\pi g_3}{2\omega_1^2}, \qquad 32\,\mathcal{G}\,\frac{\partial}{\partial g_2}\,\frac{\omega_3-\omega_1}{i(\omega_3+\omega_1)} = -\,\frac{9\pi g_3}{\omega_2^2},$$

qui permettent, dans le cas où g_2 et g_3 sont réels, et suivant que $\mathcal{G}$ est positif ou négatif, de reconnaître, en supposant g_3 fixe et g_2 variable, dans quel sens varient les nombres réels et positifs dont les dérivées par rapport à g_2 figurent dans les premiers membres, et, par suite, de quelle façon varie le rectangle des périodes.

1° $\mathcal{G} > 0$; ω_1, ω_3 ont le même sens qu'au n° 590. Le rapport $\frac{\omega_3}{i\omega_1}$ ou $\frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}}$, lorsque g_2 croît de $3\sqrt[3]{g_3^2}$ à $+\infty$, diminue de $+\infty$ à 1, ou croît de 0 à 1, suivant que g_3 est positif ou négatif. Les valeurs limites se déduisent des expressions de X, X' au moyen de $\varkappa$, en remarquant que, d'une part, g_2 étant un peu plus grand que $3\sqrt[3]{g_3^2}$, e_2 est voisin de e_3 ou de e_1, $\varkappa$ est voisin de 0 ou de 1, suivant que l'on a $g_3 \gtrless 0$, et, d'autre part, que, g_2 étant voisin de $+\infty$, les racines e_1, e_2, e_3 sont respectivement voisines de $\frac{\sqrt{g_2}}{2}$, $\frac{-g_3}{g_2}$, $\frac{-\sqrt{g_2}}{2}$, en sorte que $\varkappa$ est voisin de $\frac{1}{2}$. Pour $g_3 = 0$, on a $\omega_3 = i\omega_1$.

2° $\mathcal{G} < 0$: ω_1, ω_3 ont le même sens qu'au n° 565. Le rapport $\frac{\omega_3-\omega_1}{i(\omega_3+\omega_1)}$ ou $\frac{\mathrm{X}'i-\mathrm{X}}{\mathrm{X}i-\mathrm{X}'}$, lorsque g_2 croît de $-\infty$ à $3\sqrt[3]{g_3^2}$, croît de 1 à $+\infty$, ou décroît de 1 à 0, suivant que l'on a $g_3 \gtrless 0$. Pour ce qui est des valeurs limites, on les obtiendra en se reportant au n° 565 et aux formules (CXX_4), en remarquant, d'une part, que g_2 étant voisin de $-\infty$, la racine réelle e_2 est petite, tandis que le coefficient de i est grand et positif dans e_1, grand et négatif dans e_3, en sorte que $\varkappa$ est voisin de $\frac{1}{2}$, et, d'autre part, que, g_2 étant un peu plus petit que $3\sqrt[3]{g_3^2}$, le coefficient de i est petit dans e_1 et dans e_3, en sorte que le coefficient de i dans $\varkappa$ est très grand et négatif ou positif suivant que l'on a $g_3 \gtrless 0$. Le rapport considéré est égal à $\sqrt{3}$ ou à $\frac{1}{\sqrt{3}}$, pour $g_2 = 0$, suivant que g_3 est positif ou négatif, comme il résulte aisément du n° 551. Il est égal à 1 pour $g_3 = 0$.

ordre. Le caractère de ces équations et la propriété de leurs coefficients d'être des fonctions algébriques de g_2, g_3, ne sont pas altérés si, d'une part, on change de variable indépendante, la nouvelle variable étant liée algébriquement à g_2, g_3, et si, d'autre part, on multiplie soit ω_α, soit η_α, par une fonction algébrique de g_2, g_3. En multipliant ainsi $\omega_\alpha, \eta_\alpha$ par des fonctions algébriques homogènes de g_2, g_3 qui soient respectivement des degrés $-1, 1$, et en prenant pour variable indépendante une fonction algébrique homogène x de g_2, g_3 qui soit de degré 0, on voit que les fonctions A, B de degré 0, qui remplacent ω_α, η_α, vérifieront un système d'équations différentielles linéaires (ordinaires) du premier ordre de la forme

$$\frac{d\mathrm{A}}{dx} = \mathrm{PA} + \mathrm{QB}, \qquad \frac{d\mathrm{B}}{dx} = \mathrm{RA} + \mathrm{SB},$$

où P, Q, R, S sont des fonctions algébriques de la seule variable x, comme le montre immédiatement la considération de l'homogénéité. Chacune de ces fonctions A, B vérifiera une équation différentielle linéaire (ordinaire) du second ordre.

Les renseignements qui précèdent et la remarque que l'on a faite au n° 638 suffisent pour former les équations de cette nature. Pour $x = k^2$, $\mathrm{A} = \mathrm{K}$, $\mathrm{B} = \mathrm{E}$, on obtient ainsi les relations linéaires (CXLV_4); des relations analogues pour $\dfrac{d\mathrm{K}'}{d(k^2)}$, $\dfrac{d\mathrm{E}'}{d(k^2)}$ s'en déduisent par le changement de k^2 en k'^2. On retrouve de cette façon l'équation du second ordre (CXLV_5) que vérifient K et K', équation qui a joué un rôle capital dans le Chapitre VII, et, d'autre part, l'équation (CXLV_5) que vérifie E; celle que vérifie E' s'en déduit aisément. Si l'on pose

$$j = \frac{g_2^3}{16\,\mathcal{G}}, \quad \mathrm{A} = 2^{\frac{1}{3}}\,\mathcal{G}^{\frac{1}{12}}\,\omega_\alpha, \quad \mathrm{B} = 2^{-\frac{1}{3}}\,\mathcal{G}^{-\frac{1}{12}}\,\eta_\alpha, \quad \mathrm{C} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{B}\,j^{-\frac{2}{3}}(j-1)^{-\frac{1}{2}},$$

on obtient de même les relations (CXLV_{6-7}) : l'équation que vérifie A est due à M. Bruns.

645. Les équations (XCII) du n° 640 permettent évidemment d'obtenir les dérivées des quantités g_2, g_3 par rapport à ω_1, ω_3, et l'on pourra ensuite remplacer les systèmes d'équations où figurent les dérivées par rapport à u, g_2, g_3 par des systèmes d'équations

où figurent les dérivées par rapport à u, ω_1, ω_3. Pour les fonctions homogènes et de degré o, on pourra introduire, au lieu des deux variables ω_1, ω_3, la variable unique $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$, et l'on prévoit ainsi le lien des équations (XCII), (XCIII) que vérifient les fonctions σ, σ_α, avec l'équation

(XCIII) $$\frac{\partial^2 \mathfrak{I}}{\partial v^2} - 4\pi i \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial \tau} = 0$$

du n° **166** que vérifient les quatre fonctions $\mathfrak{I}$.

646. L'équation aux dérivées partielles obtenue pour la fonction σ jouit de propriétés importantes [1] sur lesquelles nous ne nous arrêterons pas. Nous nous contenterons d'indiquer l'usage commode qu'on en peut faire pour obtenir les coefficients du développement en série entière de la fonction σu.

Comme $\sigma(u; g_2, g_3)$ est une fonction (transcendante) entière de u, g_2, g_3 son développement est de la forme

$$\sum c_{\alpha,\beta,\gamma} g_2^\alpha g_3^\beta u^\gamma,$$

où α, β, γ sont des entiers positifs ou nuls; les coefficients $c_{\alpha,\beta,\gamma}$ ont des valeurs purement numériques qui dépendent de ces entiers. De ce que la fonction $\sigma(u; g_2, g_3)$ est homogène et de degré 1, on déduit, en lui appliquant la formule (b), que les trois indices α, β, γ d'un même coefficient $c_{\alpha,\beta,\gamma}$ sont nécessairement liés par la relation $-4\alpha - 6\beta + \gamma - 1 = 0$; il en résulte que, si l'on met le développement cherché sous la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu \frac{u^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

et si, pour la commodité des calculs ultérieurs, on met A_ν qui est une fonction entière de g_2, g_3 sous la forme

$$A_\nu = \sum a_{m,n} \left(\frac{g_2}{2}\right)^m (6g_3)^n,$$

où $a_{m,n}$ est un coefficient purement numérique, m et n sont des

[1] *Voir* WEIERSTRASS, *loc. cit.;* HALPHEN, tome I, page 309.

entiers positifs ou nuls qui vérifient la condition $2m+3n=\nu$. L'équation (3) fournit d'ailleurs immédiatement, pour le calcul des polynomes A_ν, la relation

$$A_\nu = 12 g_3 \frac{\partial A_{\nu-1}}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial A_{\nu-1}}{\partial g_3} - \frac{(\nu-1)(2\nu-1)}{6} g_2 A_{\nu-2},$$

qui, sachant que l'on a (IX_1) $A_0 = 1$, $A_1 = 0$, permet de calculer aisément ces polynomes; en y faisant

$$g_2 = 2x, \qquad g_3 = \frac{y}{6},$$

elle prend la forme un peu plus simple

$$A_\nu = y \frac{\partial A_{\nu-1}}{\partial x} + 16 x^2 \frac{\partial A_{\nu-1}}{\partial y} - \frac{(\nu-1)(2\nu-1)}{3} x A_{\nu-2};$$

on peut aussi se servir de la relation

$$\begin{aligned} a_{m,n} = (m+1)\, a_{m+1,\,n-1} + 16(n+1)\, a_{m-2,\,n+1} \\ - \tfrac{1}{3}(2m+3n-1)(4m+6n-1)\, a_{m-1,n}, \end{aligned}$$

qui en est une conséquence immédiate. On retrouve ainsi les nombres qui figurent au Tableau (XCII), nombres déjà obtenus [1] au n° 407 par un procédé moins rapide.

L'équation aux dérivées partielles (XCIII) permet de même d'obtenir les coefficients du développement de $\sigma_\alpha u$. Il convient toutefois de l'écrire autrement en y faisant figurer la dérivée partielle $\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial e_\alpha}$. Dans l'équation envisagée les dérivées partielles sont prises en regardant σ_α comme une fonction de u, g_2, g_3; si l'on regarde σ_α comme une fonction de u, g_2, g_3, e_α, on devra tenir compte de ce que e_α est lui-même une fonction de g_2, g_3, et l'on aura, en désignant par $\left(\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial g_2}\right)$, $\left(\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial g_3}\right)$, $\left(\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial e_\alpha}\right)$ les dérivées partielles de σ_α, prises dans cette nouvelle hypothèse,

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial g_3} + 12 g_3 \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial g_2} = \frac{2}{3} g_2^2 \left[\left(\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial g_3}\right) + \left(\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial e_\alpha}\right)\frac{\partial e_\alpha}{\partial g_3}\right] \\ + 12 g_3 \left[\left(\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial g_2}\right) + \left(\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial e_\alpha}\right)\frac{\partial e_\alpha}{\partial g_2}\right]. \end{aligned}$$

---

[1] On trouvera dans les Formules, etc., de M. Schwarz les coefficients $a_{m,n}$ pour toutes les valeurs de m, n telles que l'on ait $2m+3n \leq 17$; les quantités que M. Schwarz désigne par $a_{m,n}$ sont, en conservant nos notations, égales à $3^n a_{m,n}$.

En remplaçant dans l'équation (XCIII) et en se rappelant que la quantité $\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial e_\alpha}{\partial g_3}+12g_3\frac{\partial e_\alpha}{\partial g_2}$ est égale à $\frac{2}{3}(6e_\alpha^2-g_2)$, on trouve l'équation

$$\frac{\partial^2\sigma_\alpha}{\partial u^2}-\frac{2}{3}g_2^2\left(\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial g_3}\right)-12g_3\left(\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial g_2}\right)-\frac{2}{3}[6e_\alpha^2-g_2]\left(\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial e_\alpha}\right)+\left[e_\alpha+\frac{g_2}{12}u^2\right]\sigma_\alpha=0;$$

σ_α est une série entière en u dont les coefficients sont des polynomes en g_2, g_3, e_α qui peuvent être ramenés à ne contenir e_α qu'au second degré, au moyen de l'équation $4e_\alpha^3-g_2e_\alpha-g_3=0$, en sorte que l'on peut poser

$$\sigma_\alpha=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(A_\nu+B_\nu e_\alpha+C_\nu e_\alpha^2)\frac{u^{2\nu}}{(2\nu)!},\qquad A_\nu=\sum a_{m,n}^{(\nu)}g_2^m g_3^n$$
$$(2m+3n=\nu),$$

$$B_\nu=\sum b_{m,n}^{(\nu)}g_2^m g_3^n \qquad\qquad C_\nu=\sum c_{m,n}^{(\nu)}g_2^m g_3^n$$
$$(2m+3n=\nu+1),\qquad\qquad (2m+3n=\nu+2);$$

où $a_{m,n}^{(\nu)}$, $b_{m,n}^{(\nu)}$, $c_{m,n}^{(\nu)}$ sont des coefficients purement numériques comme il résulte de l'homogénéité. On trouve sans peine, au moyen de l'équation précédente, les relations

$$A_\nu=12g_3\frac{\partial A_{\nu-1}}{\partial g_2}+\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial A_{\nu-1}}{\partial g_3}-\frac{2}{3}g_2B_{\nu-1}+\frac{7}{4}g_3C_{\nu-1}-\frac{(\nu-1)(2\nu-3)}{6}g_2A_{\nu-2},$$

$$B_\nu=12g_3\frac{\partial B_{\nu-1}}{\partial g_2}+\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial B_{\nu-1}}{\partial g_3}+\frac{5}{12}g_2C_{\nu-1}-A_{\nu-1}-\frac{(\nu-1)(2\nu-3)}{6}g_2B_{\nu-2},$$

$$C_\nu=12g_3\frac{\partial C_{\nu-1}}{\partial g_2}+\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial C_{\nu-1}}{\partial g_3}+3B_{\nu-1}-\frac{(\nu-1)(2\nu-3)}{6}g_2C_{\nu-2},$$

qui, sachant que l'on a (XI_7),

$$A_0=1,\quad B_0=0,\quad C_0=0;\qquad A_1=0,\quad B_1=-1,\quad C_1=0,$$

permettent aisément le calcul des polynomes A_ν, B_ν, C_ν.

TABLEAU DES FORMULES.

TABLEAU DES FORMULES.

XCI.

Développements de pu et de ζu en séries.

$$pu = \frac{1}{u^2} + c_2\, u^2 + c_3\, u^4 + c_4\, u^6 + \ldots + c_r u^{2r-2} + \ldots,$$

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \frac{c_2}{3} u^3 - \frac{c_3}{5} u^5 - \frac{c_4}{7} u^7 - \ldots - \frac{c_r}{2r-1} u^{2r-1} + \ldots.$$

$$c_2 = \frac{g_2}{2^2.5}, \qquad c_3 = \frac{g_3}{2^2.7}, \qquad c_4 = \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2}, \qquad c_5 = \frac{3g_2g_3}{2^4.5.7.11},$$

$$c_6 = \frac{g_2^3}{2^5.3.5^3.13} + \frac{g_3^2}{2^4.7^2.13}, \qquad c_7 = \frac{g_2^2 g_3}{2^5.3.5^2.7.11},$$

$$c_8 = \frac{g_2^4}{2^8.3.5^3.13.17} + \frac{3g_2g_3^2}{2^4.7^2.11.13.17},$$

$$c_9 = \frac{29g_2^3g_3}{2^8.5^3.7.11.13.19} + \frac{g_3^3}{2^6.7^3.13.19},$$

$$c_{10} = \frac{g_2^5}{2^9.3^2.5^5.13.17} + \frac{97g_2^2g_3^2}{2^8.3.5.7^2.11^2.13.17},$$

$$c_{11} = \frac{389g_2^4g_3}{2^9.3.5^4.11.13.17.19.23} + \frac{3.41.g_2g_3^3}{2^7.5.7^2.11.13.17.19.23},$$

$$c_{12} = \frac{g_2^6}{2^{11}.3^3.5^5.13^2.17} + \frac{g_2^3g_3^2}{2^4.7^2.11^2.13^2.17.19} + \frac{3g_3^4}{2^8.5.7^4.13^2.19}.$$

$$(r-3)(2r+1)c_r = 3[c_2c_{r-2} + c_3c_{r-3} + c_4c_{r-4} + \ldots + c_{r-2}c_2] \text{ pour } r > 3.$$

XCII.

Développement de σu en série.

$$\sigma u = u + \mathrm{A}_2 \frac{u^5}{5!} + \mathrm{A}_3 \frac{u^7}{7!} + \mathrm{A}_4 \frac{u^9}{9!} + \ldots = \sum_{m,n} a_{m,n} \left(\frac{g_2}{2}\right)^m (6g_3)^n \frac{u^{4m+6n+1}}{(4m+6n+1)!}.$$

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} - \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial\sigma}{\partial g_3} - 12 g_3 \frac{\partial\sigma}{\partial g_2} + \frac{1}{12} g_2 u^2 \sigma = 0.$$

XCII (SUITE).

En posant

$$g_2 = 2x, \qquad 6g_3 = y,$$

on a

$$A_\nu = y\,\frac{\partial A_{\nu-1}}{\partial x} + 16x^2\,\frac{\partial A_{\nu-1}}{\partial y} - \frac{(\nu-1)(2\nu-1)}{3}\,x\,A_{\nu-2};$$

$$a_{m,n} = (m+1)\,a_{m+1,n-1} + 16(n+1)\,a_{m-2,n+1} - \tfrac{1}{3}(2m+3n-1)(4m+6n-1)\,a_{m-1,n}.$$

$$A_2 = -\frac{g_2}{2}, \qquad A_3 = -6g_3, \qquad A_4 = -\frac{9}{4}g_2^2,$$

$$A_5 = -18g_2g_3, \qquad A_6 = \frac{69}{8}g_2^3 - 216g_3^2, \qquad A_7 = \frac{513}{2}g_2^2g_3,$$

$$a_{0,0} = 1, \quad a_{1,0} = -1, \quad a_{0,1} = -1, \quad a_{2,0} = -3^2, \quad a_{1,1} = -2.3,$$

$$[a_{3,0} = 3.23,\ a_{0,2} = -2.3], \quad a_{2,1} = 3^2.19, \quad [a_{4,0} = 3.107,\ a_{1,2} = 2^3.3.23],$$

$$[a_{3,1} = 2^2.3^2.311,\ a_{0,3} = 2^3.3.23], \quad [a_{5,0} = 3^3.7.23.37,\ a_{2,2} = 2^2.3^3.5.53],$$

$$[a_{4,1} = 3^2.5.20807,\ a_{1,3} = 2^3.3.5^2.31],$$

$$[a_{6,0} = 3^2.313.503,\ a_{3,2} = 2^3.3^2.5.37.167,\ a_{0,4} = 2^3.3.5^2.31].$$

XCIII.

Développement de $\sigma_\alpha u$ en série.

$$\sigma_\alpha u = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (A_\nu + B_\nu e_\alpha + C_\nu e_\alpha^2)\,\frac{u^{2\nu}}{(2\nu)!};$$

$$\frac{\partial^2\sigma_\alpha}{\partial u^2} - \frac{2}{3}g_2^2\,\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial g_3} - 12g_3\,\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial g_2} + \left(e_\alpha + \frac{1}{12}g_2u^2\right)\sigma_\alpha = 0.$$

$$A_0 = 1, \qquad A_1 = 0, \qquad A_2 = \frac{g_2}{2}, \qquad A_3 = \frac{3g_3}{2^2}, \qquad A_4 = -\frac{g_2^2}{2^2},$$

$$A_5 = \frac{3^2.11\,g_2g_3}{2^4}, \qquad A_6 = \frac{3^3.79\,g_3^2}{2^4} + \frac{3.17\,g_2^3}{2^3}, \qquad A_7 = \frac{3^2.1861\,g_2^2g_3}{2^6};$$

$$B_0 = 0, \qquad B_1 = -1, \qquad B_2 = 0, \qquad B_3 = -\frac{3g_2}{2^2}, \qquad B_4 = -\frac{3.13\,g_3}{2^2},$$

$$B_5 = -\frac{3^2g_2^2}{2^4}, \qquad B_6 = \frac{3^3.5\,g_2g_3}{2}, \qquad B_7 = \frac{3^3.401\,g_3^2}{2^4} + \frac{3.7.113\,g_2^3}{2^6};$$

$$C_0 = 0, \qquad C_1 = 0, \qquad C_2 = -3, \qquad C_3 = 0, \qquad C_4 = \frac{3.7\,g_2}{2^2},$$

$$C_5 = \frac{3^3.5\,g_3}{2^2}, \qquad C_6 = -\frac{3^3.11\,g_2^2}{2^4}, \qquad C_7 = -\frac{3^3.7.13}{2^2}\,g_2g_3.$$

XCIII (SUITE).

$$A_\nu = 12 g_3 \frac{\partial A_{\nu-1}}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial A_{\nu-1}}{\partial g_3} - \frac{(\nu-1)(2\nu-3)}{6} g_2 A_{\nu-2} - \frac{2}{3} g_2 B_{\nu-1} + \frac{7}{4} g_3 C_{\nu-1},$$

$$B_\nu = 12 g_3 \frac{\partial B_{\nu-1}}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial B_{\nu-1}}{\partial g_3} - \frac{(\nu-1)(2\nu-3)}{6} g_2 B_{\nu-2} + \frac{5}{12} g_2 C_{\nu-1} - A_{\nu-1},$$

$$C_\nu = 12 g_3 \frac{\partial C_{\nu-1}}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial C_{\nu-1}}{\partial g_3} - \frac{(\nu-1)(2\nu-3)}{6} g_2 C_{\nu-2} + 3 B_{\nu-1}.$$

Les quatre fonctions $\mathfrak{I}$ vérifient l'équation $\dfrac{\partial^2 \mathfrak{I}(v \mid \tau)}{\partial v^2} = 4\pi i \dfrac{\partial \mathfrak{I}(v \mid \tau)}{\partial \tau}$.

XCIV.

Développement de $\mathcal{A}(u, u_0)$ en série.

$$\mathcal{A}(u, u_0) = \frac{\sigma(u+u_0)}{\sigma u\, \sigma u_0} e^{-u\zeta u_0} = \frac{1}{u}\left[\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 \frac{u^2}{2!} + \alpha_3 \frac{u^3}{3!} + \ldots + \alpha_n \frac{u^n}{n!} + \ldots\right].$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\,p u_0, \quad \alpha_3 = -\,p' u_0, \quad \alpha_4 = -3 p^2 u_0 + \frac{3}{5} g_2, \quad \alpha_5 = -2 p u_0 p' u_0,$$

$$\alpha_6 = -5 p^3 u_0 - g_2 p u_0 + \frac{20}{7} g_3, \qquad \alpha_7 = -3 p^2 u_0 p' u_0 - 3 g_2 p' u_0;$$

$$\frac{n-3}{(n-1)!}\alpha_n = \frac{p u_0}{(n-2)!}\alpha_{n-2} + \frac{2 c_2}{(n-4)!}\alpha_{n-4} + \ldots + \frac{2 c_r}{(n-2r)!}\alpha_{n-2r} + \ldots \quad \left(r \leqq \frac{n}{2}\right),$$

où l'on a $r \leqq \frac{n}{2}$ et où $c_2, c_3, \ldots, c_r$ sont donnés par le Tableau (XCI).

XCV.

Développement en séries des solutions y de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = a y^4 + b y^2 + c.$$

$$y = \sqrt{c}\left[\frac{u}{1} + A_0^{(1)} \frac{u^3}{3!} + A_0^{(2)} \frac{u^5}{5!} + \ldots + A_0^{(n)} \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right]$$

et, en supposant $a + b + c = 0$,

$$y = 1 + (A_1^{(1)} + A_0^{(1)}) \frac{u^2}{2!} + \ldots + (A_n^{(n)} + A_{n-1}^{(n)} + \ldots + A_0^{(n)}) \frac{u^{2n}}{2n!} + \ldots.$$

sont des solutions de l'équation différentielle, si l'on prend pour les coefficients A les valeurs qui suivent.

XCV (SUITE).

$$\mathrm{A}_1^{(1)} = 2a, \qquad \mathrm{A}_0^{(1)} = b;$$

$$\mathrm{A}_2^{(2)} = 2^3.3.a^2, \qquad \mathrm{A}_1^{(2)} = 2^2.5\,ab, \qquad \mathrm{A}_0^{(2)} = b^2 + 2^2.3\,ac;$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{A}_3^{(3)} = 2^4.3^2.5\,a^3, \qquad \mathrm{A}_2^{(3)} = 2^3.3.5.7\,a^2 b,\\
&\mathrm{A}_1^{(3)} = 2.7.13\,ab^2 + 2^3.3^2.7\,a^2 c, \qquad \mathrm{A}_0^{(3)} = b^3 + 2^2.3.11\,abc;
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{A}_4^{(4)} = 2^7.3^2.5.7\,a^4, \qquad \mathrm{A}_3^{(4)} = 2^6.3^3.5.7\,a^3 b,\\
&\mathrm{A}_2^{(4)} = 2^4.3^2.7.23\,a^2 b^2 + 2^6.3^4.7\,a^3 c,\\
&\mathrm{A}_1^{(4)} = 2^3.5.41\,ab^3 + 2^5.3^3.5^2\,a^2 bc, \qquad \mathrm{A}_0^{(4)} = b^4 + 2^3.3^2.17\,ab^2 c + 2^4.3^3.7\,a^2 c^2
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{A}_5^{(5)} = 2^8.3^4.5^2.7\,a^5, \qquad \mathrm{A}_4^{(5)} = 2^7.3^3.5^2.7.11\,a^4 b,\\
&\mathrm{A}_3^{(5)} = 2^5.3^3.5.7.11^2\,a^3 b^2 + 2^7.3^4.5.7.11\,a^4 c,\\
&\mathrm{A}_2^{(5)} = 2^4.3.5.11.227\,a^2 b^3 + 2^6.3^4.5.11.13\,a^3 bc,\\
&\mathrm{A}_1^{(5)} = 2.11^2.61\,ab^4 + 2^4.3^3.11.139\,a^2 b^2 c + 2^5.3^3.7.11^2\,a^3 c^2,\\
&\mathrm{A}_0^{(5)} = b^5 + 2^3.3.461\,ab^3 c + 2^4.3^3.307\,a^2 bc^2;
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{A}_6^{(6)} = 2^{10}.3^5.5^2.7.11\,a^6, \qquad \mathrm{A}_5^{(6)} = 2^9.3^4.5^2.7.11.13\,a^5 b,\\
&\mathrm{A}_4^{(6)} = 2^9.3^5.5.7.11.13\,a^5 c + 2^7.3^3.5.7.11.13.43\,a^4 b^2,\\
&\mathrm{A}_3^{(6)} = 2^8.3^4.5.11.13.53\,a^4 bc + 2^6.3^2.5.11.13.479\,a^3 b^3,\\
&\mathrm{A}_2^{(6)} = 2^6.3^4.7^3.11.13\,a^3 b^2 c + 2^7.3^4.7.11.13.17\,a^4 c^2 + 2^3.3.7.11.13.631\,a^2 b^4,\\
&\mathrm{A}_1^{(6)} = 2^5.3^2.5.7.13.137\,a^2 b^3 c + 2^6.3^3.5.7.13.103\,a^3 bc^2 + 2^2.5.7.13.73\,ab^5,\\
&\mathrm{A}_0^{(6)} = b^6 + 2^2.3.19^2.23\,ab^4 c + 2^4.3^3.19.499\,a^2 b^2 c^2 + 2^6.3^4.7.11^2\,a^3 c^3.
\end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{A}_r^{(n+1)} = (2r-1)\,2ra\,\mathrm{A}_{r-1}^{(n)} + (2r+1)^2 b\,\mathrm{A}_r^{(n)} + (2r+2)(2r+3)c\,\mathrm{A}_{r+1}^{(n)}$$
$$(r = 0, 1, \ldots, n+1);$$

$$\mathrm{A}_r^{(n)} = 0 \quad \text{pour} \quad r < 0 \quad \text{et pour} \quad r > n.$$

	$y = \xi_{\alpha 0}(u)$.	$y = \xi_{0\alpha}(u)$.	$y = \xi_{\beta\gamma}(u)$.	$y = \operatorname{sn} u$.	$y = \operatorname{cn} u$.	$y = \operatorname{dn} u$.
a....	1	$(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)$	$e_\gamma - e_\alpha$	k^2	$-k^2$	-1
b....	$3e_\alpha$	$3e_\alpha$	$3e_\alpha$	$-1-k^2$	$2k^2-1$	$2-k^2$
c....	$(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)$	1	$e_\beta - e_\alpha$	1	$1-k^2$	k^2-1

XCVI.

Valeurs pour $u=0$ des dérivées de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

$$\operatorname{sn}'(0)=1,\qquad -\operatorname{sn}'''(0)=1+k^2,\qquad \operatorname{sn}^{(\mathrm{v})}(0)=1+14k^2+k^4,$$

$$-\operatorname{sn}^{(\mathrm{vii})}(0)=1+135k^2+135k^4+k^6,$$

$$\operatorname{sn}^{(\mathrm{ix})}(0)=1+1228k^2+5478k^4+1228k^6+k^8,$$

$$-\operatorname{sn}^{(\mathrm{xi})}(0)=1+11069k^2+165826k^4+165826k^6+11069k^8+k^{10},$$

$$\operatorname{sn}^{(\mathrm{xiii})}(0)=1+99642k^2+4494351k^4+13180268k^6 + 4494351k^8+99642k^{10}+k^{12},$$

$$-\operatorname{sn}^{(\mathrm{xv})}(0)=1+896803k^2+116294673k^4+834687179k^6 + 834687179k^8+116294673k^{10}+896803k^{12}+k^{14}.$$

$$\operatorname{cn}''(0)=-1,\quad \operatorname{cn}^{(2\nu)}(0)=(-1)^\nu\left[1+A_1^{(\nu)}k^2+A_2^{(\nu)}k^4+\ldots+A_{\nu-1}^{(\nu)}k^{2\nu-2}\right],$$

$$\operatorname{dn}''(0)=-k^2,\ \operatorname{dn}^{(2\nu)}(0)=(-1)^\nu\left[A_{\nu-1}^{(\nu)}k^2+A_{\nu-2}^{(\nu)}k^4+\ldots+A_1^{(\nu)}k^{2\nu-2}+k^{2\nu}\right];$$

$$A_0^{(1)}=1;\qquad A_1^{(2)}=4;\qquad A_1^{(3)}=44,\quad A_2^{(3)}=16;$$

$$A_1^{(4)}=408,\qquad A_2^{(4)}=912,\qquad A_3^{(4)}=64;$$

$$A_1^{(5)}=3688,\qquad A_2^{(5)}=30768,\qquad A_3^{(5)}=15808,\qquad A_4^{(5)}=256;$$

$$A_1^{(6)}=33212,\ A_2^{(6)}=870640,\ A_3^{(6)}=1538560,\ A_4^{(6)}=259328,\ A_5^{(6)}=1024;$$

$$A_1^{(7)}=298932,\quad A_2^{(7)}=22945056,\quad A_3^{(7)}=106923008,\quad A_4^{(7)}=65008896,$$

$$A_5^{(7)}=4180992,\quad A_6^{(7)}=4096.$$

$$\operatorname{sn}(u,k)=\frac{1}{\sqrt{p\left(u;\dfrac{g_2}{(e_1-e_3)^2},\dfrac{g_3}{(e_1-e_3)^3}\right)+\dfrac{1+k^2}{3}}},$$

$$\frac{g_2}{(e_1-e_3)^2}=\frac{4}{3}(k^4-k^2+1),\qquad \frac{g_3}{(e_1-e_3)^3}=\frac{4}{27}(1+k^2)(2-k^2)(1-2k^2),$$

$$\frac{\mathcal{G}}{(e_1-e_3)^6}=\frac{g_2^3-27g_3^2}{16(e_1-e_3)^6}=k^4k'^4,$$

$$j=\frac{4}{27}\,\frac{(1-k^2k'^2)^3}{k^4k'^4}=\frac{4}{27}\,\mathfrak{J}(\tau);\qquad \frac{g_2^3}{j}=\frac{27g_3^2}{j-1}=16\mathcal{G}.$$

XCVII.

Dérivées de pu en fonction linéaire des puissances de pu.

$$\frac{1}{3!}\,p''u=p^2u-\frac{g_2}{2^2.3};\qquad \frac{1}{5!}\,p^{(\mathrm{iv})}(u)=p^3u-\frac{3g_2}{2^2.5}\,pu-\frac{g_3}{2.5};$$

$$\frac{1}{7!}\,p^{(\mathrm{vi})}(u)=p^4u-\frac{g_2}{5}\,p^2u-\frac{g_3}{7}\,pu+\frac{g_2^2}{2^4.5.7};$$

XCVII (SUITE).

$$\frac{1}{9!}\,p^{(\text{VIII})}(u) = p^5 u - \frac{g_2}{2^2}\,p^3 u - \frac{5 g_3}{2^2 . 7}\,p^2 u + \frac{g_2^2}{2^3 . 3 . 5}\,p u + \frac{11 g_2 g_3}{2^4 . 3 . 5 . 7};$$

$$\frac{1}{11!}\,p^{(\text{X})}(u) = p^6 u - \frac{3 g_2}{2 . 5}\,p^4 u - \frac{3 g_3}{2 . 7}\,p^3 u + \frac{7 g_2^2}{2^4 . 5^2}\,p^2 u + \frac{3 . 19 g_2 g_3}{2^3 . 5 . 7 . 11}\,p u + \frac{g_3^2}{2^2 . 7 . 11} - \frac{g_2^3}{2^5 . 3 . 5^2 . 11};$$

$$\frac{1}{13!}\,p^{(\text{XII})}(u) = p^7 u - \frac{7 g_2}{2^2 . 5}\,p^5 u - \frac{g_3}{2^2}\,p^4 u + \frac{7 g_2^2}{2^4 . 3 . 5}\,p^3 u + \frac{3 g_2 g_3}{2^3 . 11}\,p^2 u + \left(\frac{3 g_3^2}{2^2 . 7 . 13} - \frac{7 g_2^3}{2^6 . 5^2 . 13}\right) p u - \frac{29 . 47 g_2^2 g_3}{2^6 . 3 . 5^2 . 7 . 11 . 13};$$

$$\frac{1}{15!}\,p^{(\text{XIV})}(u) = p^8 u - \frac{2 g_2}{5}\,p^6 u - \frac{2 g_3}{7}\,p^5 u + \frac{13 g_2^2}{2^2 . 3 . 5^2}\,p^4 u + \frac{41 g_2 g_3}{2 . 5 . 7 . 11}\,p^3 u + \left(\frac{37 g_3^2}{2^2 . 7^2 . 13} - \frac{41 g_2^3}{2^3 . 3 . 5^3 . 13}\right) p^2 u - \frac{61 g_2^2 g_3}{2^3 . 3 . 5^2 . 7 . 11}\,p u + \frac{g_2^4}{2^8 . 3 . 5^3 . 13} - \frac{193 g_2 g_3^2}{2^4 . 5 . 7^2 . 11 . 13}.$$

XCVIII.

Les dérivées d'ordre pair des solutions y de l'équation différentielle $\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = ay^4 + by^2 + c$ s'expriment par la formule

$$\frac{d^{2n} y}{du^{2n}} = A_0^{(n)} y + A_1^{(n)} y^3 + A_2^{(n)} y^5 + \ldots + A_n^{(n)} y^{2n+1},$$

où les coefficients $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_n^{(n)}$ sont donnés par le Tableau (XCV).

$$\xi''_{\alpha 0}(u) = 3 e_\alpha \xi_{\alpha 0}(u) + 2 \xi_{\alpha 0}^3(u),$$

$$\xi''_{0\alpha}(u) = 3 e_\alpha \xi_{0\alpha}(u) + \left(6 e_\alpha^2 - \frac{g_2}{2}\right) \xi_{0\alpha}^3(u);$$

$$\xi''_{\beta\gamma}(u) = 3 e_\alpha \xi_{\beta\gamma}(u) + 2 (e_\gamma - e_\alpha) \xi_{\beta\gamma}^3(u),$$

$$\xi^{\text{IV}}_{\alpha 0}(u) = (45 e_\alpha^2 - 3 g_2)\,\xi_{\alpha 0}(u) + 60 e_\alpha\,\xi_{\alpha 0}^3(u) + 24\,\xi_{\alpha 0}^5(u),$$

$$\xi^{\text{IV}}_{0\alpha}(u) = (45 e_\alpha^2 - 3 g_2)\xi_{0\alpha}(u) + 15(8 e_\alpha^3 + g_3)\,\xi_{0\alpha}^3(u) + \tfrac{3}{2}(12 e_\alpha^2 - g_2)^2 \xi_{0\alpha}^5(u),$$

$$\xi^{\text{IV}}_{\beta\gamma}(u) = (45 e_\alpha^2 - 3 g_2)\,\xi_{\beta\gamma}(u) + 60 e_\alpha (e_\gamma - e_\alpha)\,\xi_{\beta\gamma}^3(u) + 24 (e_\gamma - e_\alpha)^2\,\xi_{\beta\gamma}^5(u).$$

XCVIII (SUITE).

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}'' u &= -(1+k^2)\operatorname{sn} u + 2k^2 \operatorname{sn}^3 u,\\
\operatorname{cn}'' u &= (2k^2-1)\operatorname{cn} u - 2k^2 \operatorname{cn}^3 u,\\
\operatorname{dn}'' u &= (2-k^2)\operatorname{dn} u - 2\operatorname{dn}^3 u;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}^{\text{IV}} u &= (1+14k^2+k^4)\operatorname{sn} u - 20k^2(1+k^2)\operatorname{sn}^3 u + 24k^4 \operatorname{sn}^5 u,\\
\operatorname{cn}^{\text{IV}} u &= (1-16k^2+16k^4)\operatorname{cn} u + 20k^2(1-2k^2)\operatorname{cn}^3 u + 24k^4 \operatorname{cn}^5 u,\\
\operatorname{dn}^{\text{IV}} u &= (16-16k^2+k^4)\operatorname{dn} u + 20(k^2-2)\operatorname{dn}^3 u + 24\operatorname{dn}^5 u.
\end{aligned}$$

IC.

$$a_{\mu,\nu} = \frac{2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_3}{n}.$$

(1) $$\frac{1}{n}\sigma(nu) = (-1)^{n^2-1} e^{-n(n-1)\eta_2 u}\,\sigma u \prod_{(\mu,\nu)}^{(\prime)} \frac{\sigma(u-a_{\mu,\nu})}{\sigma a_{\mu,\nu}},$$

(2) $$n\zeta(nu) = \sum_{(\mu,\nu)} \zeta(u-a_{\mu,\nu}) - n(n-1)\eta_2,$$

(3) $$n^2 \wp(nu) = \sum_{(\mu,\nu)} \wp(u-a_{\mu,\nu}),$$

(4) $$\sum_{(\mu,\nu)}^{(\prime)} \zeta(a_{\mu,\nu}) = -n(n-1)\eta_2, \qquad \sum_{(\mu,\nu)}^{(\prime)} \wp(a_{\mu,\nu}) = 0,$$

$$(\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1);$$

(5) $$\sigma(2u) = 2\sigma u \frac{\sigma(\omega_1-u)\,\sigma(\omega_2-u)\,\sigma(\omega_3-u)}{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3},$$

(6) $$2\zeta(2u) = \zeta u + \zeta(u-\omega_1) + \zeta(u-\omega_2) + \zeta(u-\omega_3),$$

(7) $$4\wp(2u) = \wp u + \wp(u-\omega_1) + \wp(u-\omega_2) + \wp(u-\omega_3).$$

C.

(1) $$\left\{\begin{aligned}
\zeta u - \zeta(u+a) + \zeta a &= \xi_{0\alpha}(a)\,\xi_{\alpha 0}(u)\,\xi_{\alpha 0}(u+a) + \xi_{\beta 0}(a)\,\xi_{\gamma\alpha}(a),\\
\zeta_\alpha u - \zeta_\alpha(u+a) + \zeta_\alpha a &= (e_\alpha - e_\beta)\,\xi_{0\beta}(a)\,[\xi_{\gamma\alpha}(u)\,\xi_{\gamma\alpha}(u+a) - \xi_{\gamma 0}(a)],\\
\zeta u - \zeta_\alpha(u+a) + \zeta a &= \xi_{\alpha 0}(a)\,\xi_{\alpha 0}(u)\,\xi_{0\alpha}(u+a),\\
\zeta u - \zeta_\beta(u+a) + \zeta_\gamma a &= \xi_{\beta\gamma}(a)\,\xi_{\alpha 0}(u)\,\xi_{\gamma\beta}(u+a).
\end{aligned}\right.$$

(2) $$\left\{\begin{aligned}
\xi_{\alpha 0}(u)\,\xi_{\beta 0}(u+a) &= \xi_{\beta 0}(a)\,\xi_{\gamma 0}(u) - \xi_{\alpha 0}(a)\,\xi_{\gamma 0}(u+a),\\
(e_\beta - e_\alpha)\,\xi_{0\alpha}(u)\,\xi_{\gamma\alpha}(u+a) &= \xi_{\beta 0}(a)\,\xi_{\beta\alpha}(u) - \xi_{\alpha 0}(a)\,\xi_{\beta\alpha}(u+a),\\
(e_\alpha - e_\beta)\,\xi_{\gamma\alpha}(u)\,\xi_{\gamma\beta}(u+a) &= (e_\alpha - e_\gamma)\,\xi_{\beta\gamma}(a)\,\xi_{\beta\alpha}(u)\\
&\quad + (e_\gamma - e_\beta)\,\xi_{\alpha\gamma}(a)\,\xi_{\alpha\beta}(u+a).
\end{aligned}\right.$$

CI.

$$
(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{Z}(u)+\mathrm{Z}(a)-\mathrm{Z}(u+a)=k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(u+a)\\
&\quad=\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}[\mathrm{cn}\,a-\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}(u+a)]=\frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}[\mathrm{dn}\,a-\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}(u+a)];
\end{aligned}\right.
$$

$$
(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}(u+a)&=\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}(u+a)-\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,u,\\
\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}(u+a)&=\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}(u+a)+k'^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u,\\
\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}(u+a)&=\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}(u+a)+\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}(u+a),\\
k^2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}(u+a)&=\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}(u+a)-k'^2;
\end{aligned}\right.
$$

$$
(3)\quad \left\{\begin{aligned}
-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(u+a)&=k^2\,\frac{\mathrm{sn}(u+a)}{\mathrm{dn}(u+a)}[\mathrm{cn}(u+a)-\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,u]\\
&=\frac{\mathrm{sn}(u+a)}{\mathrm{cn}(u+a)}[\mathrm{dn}(u+a)-\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,u],\\
\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,u&=\mathrm{dn}(u+a)\,\mathrm{sn}\,u+\mathrm{cn}(u+a)\,\mathrm{sn}\,a,\\
\mathrm{cn}(u+a)\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,u&=\mathrm{dn}(u+a)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,a-k'^2\,\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}\,a,\\
\mathrm{dn}(u+a)\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,u&=\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{dn}\,u-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,u.
\end{aligned}\right.
$$

CII.

$$
(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{Z}'(0)&=\frac{1}{4\mathrm{K}^2}\,\frac{\mathfrak{I}_4''(0)}{\mathfrak{I}_4(0)}=\frac{2\pi^2}{\mathrm{K}^2}\,\frac{q-2^2.q^4+3^2.q^9-\dots}{1-2q+2q^4-2q^9+\dots}\\
&=\frac{1+k^2}{3}-\frac{\eta_1}{\mathrm{K}\sqrt{e_1-e_3}}=1-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(2)\quad \frac{1+k'^2}{3}+\frac{\eta_3}{i\mathrm{K}'\sqrt{e_1-e_3}}=1-\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{K}'},
$$

$$
(3)\quad \mathrm{E}\mathrm{K}'+\mathrm{E}'\mathrm{K}-\mathrm{K}\mathrm{K}'=\frac{\pi}{2};
$$

$$
(4)\quad k^2\,\mathrm{sn}^2 u=\mathrm{Z}'(0)-\mathrm{Z}'(u),\qquad \mathrm{Z}'(\mathrm{K})=\mathrm{Z}'(0)-k^2,
$$

$$
(5)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{E}(u)&=\int_0^u \mathrm{dn}^2 u\,du=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\,u+\mathrm{Z}(u),\\
\Pi(u,\alpha)&=\int_0^u \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{sn}^2 u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2 u}\,du=u\mathrm{Z}(\alpha)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(\alpha-u)}{\Theta(\alpha+u)};
\end{aligned}\right.
$$

$$
(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{am}\,u=\int_0^u \mathrm{dn}\,u\,du,\quad \mathrm{co\,am}\,u=\mathrm{am}(\mathrm{K}-u),\\
&\sin\mathrm{am}\,u=\mathrm{sn}\,u,\qquad \cos\mathrm{am}\,u=\mathrm{cn}\,u,\qquad \Delta\,\mathrm{am}\,u=\mathrm{dn}\,u,\\
&\mathrm{am}(n\mathrm{K})=n\frac{\pi}{2},\quad \mathrm{am}(u+2n\mathrm{K})=\mathrm{am}\,u+n\pi,\quad \mathrm{am}(-u)=-\mathrm{am}\,u,
\end{aligned}\right.
$$

CII (suite).

$$(7)\ Z(u)=\frac{\Theta' u}{\Theta u}=\frac{1}{2K}\frac{\vartheta_4'\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{2K}\right)}=Z'(0)\frac{u}{1}-2k^2\frac{u^3}{3!}+8k^2(k^2+1)\frac{u^5}{5!}-\dots;$$

$$(8)\qquad E=E(K)=\int_0^K \mathrm{dn}^2(u,k)\,du,$$

$$(9)\qquad E'=E(K')=\int_0^{K'} \mathrm{dn}^2(u,k')\,du,$$

$$(10)\qquad \Pi(K,\alpha)=KZ(\alpha)=KE(\alpha)-\alpha E;$$

$$(11)\quad \begin{cases} \Omega(u)=e^{\int_0^u E(u)\,du}=e^{\frac{1}{2}\frac{E}{K}u^2}\dfrac{\Theta(u)}{\Theta(0)}, \\ E(u)=\dfrac{\Omega'(u)}{\Omega(u)}, \qquad \Pi(u,\alpha)=uE(\alpha)+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{\Omega(u-\alpha)}{\Omega(u+\alpha)}. \end{cases}$$

CIII.

Formules d'addition de ζu et pu.

$$\zeta(u\pm a)-\zeta u\mp\zeta a=\frac{1}{2}\frac{p'u\mp p'a}{pu-pa},$$

$$p(u\pm a)-pu=-\frac{1}{2}\frac{d}{du}\left[\frac{p'u\mp p'a}{pu-pa}\right].$$

$$(1)\quad \begin{cases} \zeta(u+a)+\zeta(u-a)-2\zeta u=\dfrac{p'u}{pu-pa}, \\ \zeta(u+a)-\zeta(u-a)-2\zeta a=-\dfrac{p'a}{pu-pa}; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} p(u+a)+p(u-a)-2pu=\dfrac{p'^2u-p''u(pu-pa)}{(pu-pa)^2}, \\ p(u+a)-p(u-a)=-\dfrac{p'u\,p'a}{(pu-pa)^2}; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{p'u-p'a}{pu-pa}=\dfrac{[p(u+a)-pu][pu-pa]+\frac{1}{2}p''u}{p'u} \\ \qquad\qquad =\dfrac{[p(u+a)-pa][pa-pu]+\frac{1}{2}p''a}{p'a}; \end{cases}$$

$$(4)\qquad p(u\pm a)=\frac{(pu+pa)(2pu\,pa-\frac{1}{2}g_2)-g_3\mp p'u\,p'a}{2(pu-pa)^2};$$

$$(5)\qquad p(u\pm a)+pu+pa=\frac{1}{4}\left[\frac{p'u\mp p'a}{pu-pa}\right]^2;$$

CIII (suite).

$$(6)\qquad \wp(u+a)\wp(u-a) = \frac{\left(\wp u\,\wp a + \frac{g_2}{4}\right)^2 + g_3(\wp u + \wp a)}{(\wp u - \wp a)^2};$$

$$(7)\qquad \wp(2u) = -2\wp u + \frac{1}{4}\frac{\wp''^2 u}{\wp'^2 u} = \frac{\left(\wp^2 u + \frac{g_2}{4}\right)^2 + 2g_3\wp u}{\wp'^2 u};$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & \wp(a+b) & -\wp'(a+b) \\ 1 & \wp a & \wp' a \\ 1 & \wp b & \wp' b \end{vmatrix} = 0, \\ &\begin{vmatrix} 1 & \wp u & \wp' u \\ 1 & \wp a & \wp' a \\ 1 & \wp b & \wp' b \end{vmatrix} = -\frac{2\sigma(a-b)\,\sigma(u-a)\,\sigma(u-b)\,\sigma(u+a+b)}{\sigma^3 a\,\sigma^3 b\,\sigma^3 u}; \end{aligned}\right.$$

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\wp' a - \wp' b}{\wp a - \wp b} = \frac{\wp' b - \wp' c}{\wp b - \wp c} = \frac{\wp' c - \wp' a}{\wp c - \wp a}, \\ &\frac{\wp b\,\wp' c - \wp c\,\wp' b}{\wp b - \wp c} = \frac{\wp c\,\wp' a - \wp a\,\wp' c}{\wp c - \wp a} = \frac{\wp a\,\wp' b - \wp b\,\wp' a}{\wp a - \wp b}; \\ &[a + b + c \equiv 0, \text{ modd. } 2\omega_1, 2\omega_3]. \end{aligned}\right.$$

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\wp b\,\wp c + \wp c\,\wp a + \wp a\,\wp b + \frac{g_2}{4}\right)^2 = (4\wp a\,\wp b\,\wp c - g_3)(\wp a + \wp b + \wp c); \\ &[a \pm b \pm c \equiv 0, \text{ modd. } 2\omega_1, 2\omega_3]. \end{aligned}\right.$$

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &(4\wp a\,\wp b\,\wp c - g_3)(\wp a + \wp b + \wp c) \\ &\qquad - \left(\wp b\,\wp c + \wp c\,\wp a + \wp a\,\wp b + \frac{g_2}{4}\right)^2 \\ &= \frac{\sigma(a+b+c)\,\sigma(a+b-c)\,\sigma(a-b+c)\,\sigma(-a+b+c)}{\sigma^4 a\,\sigma^4 b\,\sigma^4 c} \\ &= -(\wp b - \wp c)^2[\wp a - \wp(b+c)][\wp a - \wp(b-c)] \\ &= -(\wp c - \wp a)^2[\wp b - \wp(c+a)][\wp b - \wp(c-a)] \\ &= -(\wp a - \wp b)^2[\wp c - \wp(a+b)][\wp c - \wp(a-b)]; \end{aligned}\right.$$

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\wp' a - \wp' b}{\wp a - \wp b} + \frac{\wp' c - \wp' d}{\wp c - \wp d} + \frac{\wp'(a+b) - \wp'(c+d)}{\wp(a+b) - \wp(c+d)} \\ &= \frac{\wp' a - \wp' c}{\wp a - \wp c} + \frac{\wp' b - \wp' d}{\wp b - \wp d} + \frac{\wp'(a+c) - \wp'(b+d)}{\wp(a+c) - \wp(b+d)}; \end{aligned}\right.$$

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \wp u_0 & \wp' u_0 & \ldots & \wp^{(n-1)}(u_0) \\ 1 & \wp u_1 & \wp' u_1 & \ldots & \wp^{(n-1)}(u_1) \\ \cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \wp u_n & \wp' u_n & \ldots & \wp^{(n-1)}(u_n) \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (-1)^n 1!\,2!\ldots n! \\ &\quad\times \frac{\sigma(u_0 + u_1 + \ldots + u_n)}{\sigma^{n+1}u_0\,\sigma^{n+1}u_1\ldots\sigma^{n+1}u_n}\prod_{(\alpha,\beta)}\sigma(u_\alpha - u_\beta) \\ &\qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots, n;\ \alpha > \beta). \end{aligned}$$

CIV.

$$a_{p,q} = \frac{2p\omega_1 + 2q\omega_3}{n}; \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad q = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

$$(1) \qquad \Psi_n(u) = \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)};$$

$$(2) \quad \Psi_n(u) = \frac{(-1)^{n-1}}{[1!\,2!\ldots(n-1)!]^2} \begin{vmatrix} \wp' u & \wp'' u & \ldots & \wp^{(n-1)} u \\ \wp'' u & \wp''' u & \ldots & \wp^{(n)} u \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \wp^{(n-1)}(u) & \wp^{(n)}(u) & \ldots & \wp^{(2n-3)}(u) \end{vmatrix};$$

$$(3) \quad \Psi_{2\nu+1}(u) = (2\nu+1) \prod_{q=1}^{q=\nu} (\wp u - \wp a_{0,q}) \prod_{p=1}^{p=\nu} \prod_{q=-\nu}^{q=\nu} (\wp u - \wp a_{p,q});$$

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \Psi_{2\nu}(u) &= 4\nu \wp' u \prod_{p=1}^{p=\nu-1} [\wp u - \wp(\omega_3 + a_{p,0})] \prod_{q=1}^{q=\nu-1} (\wp u - \wp a_{0,q}) \\ &\times \prod_{q=1}^{q=\nu-1} [\wp u - \wp(\omega_1 + a_{0,q})] \prod_{p=1}^{p=\nu-1} \prod_{q=-(\nu-1)}^{q=\nu-1} (\wp u - \wp a_{p,q}); \end{aligned} \right.$$

$$(5) \quad \Psi_n^2(u) = n^2 \prod_{p,q}{}^{(\prime)} (\wp u - \wp a_{p,q}), \quad \left(\begin{matrix} p, q = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \\ \text{excepté } p = q = 0 \end{matrix} \right);$$

$$(6) \qquad \wp(nu) - \wp u = -\frac{\Psi_{n+1}(u)\Psi_{n-1}(u)}{\Psi_n^2(u)}.$$

$$\Psi_2(u) = -\wp' u,$$

$$\Psi_3(u) = 3\wp^4 u - \frac{3}{2} g_2 \wp^2 u - 3 g_3 \wp u - \frac{g_2^2}{16}$$

$$= 3\left(\wp u - \wp\frac{2\omega_1}{3}\right)\left(\wp u - \wp\frac{2\omega_2}{3}\right)\left(\wp u - \wp\frac{2\omega_3}{3}\right)\left(\wp u - \wp\frac{2\omega_1 - 2\omega_3}{3}\right),$$

$$\Psi_4(u) = -\wp' u \left[2\wp^6 u - \frac{5}{2} g_2 \wp^4 u - 10 g_3 \wp^3 u - \frac{5}{8} g_2^2 \wp^2 u - \frac{1}{2} g_2 g_3 \wp u + \frac{1}{32} g_2^3 - g_3^2\right]$$

$$= 8\wp' u \left(\wp u - \wp\frac{\omega_1}{2}\right)\left(\wp u - \wp\frac{\omega_2}{2}\right)\left(\wp u - \wp\frac{\omega_3}{2}\right)\left(\wp u - \wp\frac{\omega_1 - \omega_3}{2}\right)$$

$$\times \left[\wp u - \wp\left(\omega_1 + \frac{\omega_3}{2}\right)\right]\left[\wp u - \wp\left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{2}\right)\right].$$

CV.

La fonction $\operatorname{ls}(v)$ est une détermination de $\log\sin\pi v$ holomorphe dans tout le plan de la variable v, où l'on a pratiqué une coupure, le long de l'axe des quantités réelles, de $-\infty$ à 0 et de 1 à $+\infty$. Elle est déterminée par les inégalités suivantes, où l'on suppose $v = a + bi$, a et b réels, n entier et où les logarithmes doivent être remplacés par leur détermination principale.

(1)

PARTIE SUPÉRIEURE DU PLAN; $b > 0$.

$$\frac{4n-1}{2} < a < \frac{4n+3}{2}, \qquad a = \frac{4n-1}{2},$$

$$\operatorname{ls}(v) = \log\sin\pi v - 2n\pi i, \qquad \operatorname{ls}(v) = \log \operatorname{ch}\pi b - (2n-1)\pi i.$$

BORD SUPÉRIEUR DE LA COUPURE; $b = 0$.

$$2n < a < 2n+1, \qquad 2n+1 < a < 2n+2,$$

$$\operatorname{ls}(v) = \log\sin\pi a - 2n\pi i, \qquad \operatorname{ls}(v) = \log|\sin\pi a| - (2n+1)\pi i.$$

PARTIE INFÉRIEURE DU PLAN; $b < 0$.

$$\frac{4n-1}{2} < a < \frac{4n+3}{2}, \qquad a = \frac{4n-1}{2},$$

$$\operatorname{ls}(v) = \log\sin\pi v + 2n\pi i, \qquad \operatorname{ls}(v) = \log \operatorname{ch}\pi b + (2n-1)\pi i.$$

BORD INFÉRIEUR DE LA COUPURE; $b = 0$.

$$2n < a < 2n+1, \qquad 2n+1 < a < 2n+2,$$

$$\operatorname{ls}(v) = \log\sin\pi a + 2n\pi i, \qquad \operatorname{ls}(v) = \log|\sin\pi a| + (2n+1)\pi i.$$

Dans les formules suivantes, v étant mis sous la forme $v = \alpha + \beta\tau$, où α, β sont réels, on suppose $|\beta| < 1$ pour les deux premières formules (2), $|\beta| < \frac{1}{2}$ pour les deux dernières formules (2) et pour les formules (3).

(2)

$$\log\vartheta_1(v) = \log\frac{1}{\pi}\vartheta_1'(0) + \operatorname{ls}(v) + \sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{2r}}{r(1-q^{2r})}(2\sin r\pi v)^2,$$

$$\log\vartheta_2(v) = \log\vartheta_2(0) + \operatorname{ls}\left(v+\tfrac{1}{2}\right) + \sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^r\frac{q^{2r}}{r(1-q^{2r})}(2\sin r\pi v)^2,$$

$$\log\vartheta_3(v) = \log\vartheta_3(0) + \sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^r\frac{q^r}{r(1-q^{2r})}(2\sin r\pi v)^2$$

$$\log\vartheta_4(v) = \log\vartheta_4(0) + \sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^r}{r(1-q^{2r})}(2\sin r\pi v)^2$$

CV (suite).

$$(3)\quad \begin{cases} \log \operatorname{sn}(2\mathrm{K}v) = 2\log \vartheta_3(0) + \operatorname{ls}(v) - \displaystyle\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^r}{r(1+q^r)}(2\sin r\pi v)^2, \\ \log \operatorname{cn}(2\mathrm{K}v) = \operatorname{ls}(v+\tfrac{1}{2}) - \displaystyle\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^r}{r[1+(-1)^r q^r]}(2\sin r\pi v)^2, \\ \log \operatorname{dn}(2\mathrm{K}v) = -\displaystyle\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{2q^{2r-1}}{(2r-1)(1-q^{4r-2})}[2\sin(2r-1)\pi v]^2 : \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} - \dfrac{1}{4}\cot\pi v = \displaystyle\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}}\sin 2r\pi v = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{q^{2s}\sin 2\pi v}{1-2q^{2s}\cos 2\pi v + q^{4s}}, \\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\vartheta_2'(v)}{\vartheta_2(v)} + \dfrac{1}{4}\operatorname{tang}\pi v = \displaystyle\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}}\sin 2r\pi v = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{-q^{2s}\sin 2\pi v}{1+2q^{2s}\cos 2\pi v + q^{4s}}, \\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\vartheta_3'(v)}{\vartheta_3(v)} = \displaystyle\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \frac{q^{r}}{1-q^{2r}}\sin 2r\pi v = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{-q^{2s-1}\sin 2\pi v}{1+2q^{2s-1}\cos 2\pi v + q^{4s-2}}, \\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)} = \displaystyle\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{r}}{1-q^{2r}}\sin 2r\pi v = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{q^{2s-1}\sin 2\pi v}{1-2q^{2s-1}\cos 2\pi v + q^{2s-2}}. \end{cases}$$

Si x est mis sous la forme $x = 2\mathrm{K}\alpha + 2i\mathrm{K}'\beta$, où α et β sont réels et si l'on suppose $|\beta| < \frac{1}{2}$, on a

$$(5)\quad \begin{cases} \mathrm{Z}(\mathrm{K}x) = \dfrac{2\pi}{\mathrm{K}} \displaystyle\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^r}{1-q^{2r}}\sin r\pi x = \frac{2\pi}{\mathrm{K}} \sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{s=1}^{s=\infty} q^{r(2s-1)}\sin r\pi x \\ \qquad = \dfrac{2\pi}{\mathrm{K}} \displaystyle\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{q^{2s-1}\sin \pi x}{1-2q^{2s-1}\cos\pi x + q^{4s-2}}; \end{cases}$$

$$(6)\qquad \frac{k^2}{4\pi^2}\mathrm{K}^2\operatorname{sn}^2(2\mathrm{K}x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{rq^r}{1-q^{2r}}\sin^2 r\pi x.$$

CVI.

Si u est mis sous la forme $u = 2\alpha\omega_1 + 2\beta\omega_3$, où α, β sont réels, et si l'on suppose $|\beta| < 1$ pour les deux premières formules de chaque groupe, $|\beta| < \frac{1}{2}$ pour les deux autres, on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\log\sigma u &= \log\frac{2\omega_1}{\pi} + \frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \log\sin\frac{\pi u}{2\omega_1} + \sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{2r}}{r(1-q^{2r})}\left(2\sin\frac{r\pi u}{2\omega_1}\right)^2,\\
\log\sigma_1 u &= \frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \log\cos\frac{\pi u}{2\omega_1} + \sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^r\frac{q^{2r}}{r(1-q^{2r})}\left(2\sin\frac{r\pi u}{2\omega_1}\right)^2,\\
\log\sigma_2 u &= \frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^r\frac{q^{r}}{r(1-q^{2r})}\left(2\sin\frac{r\pi u}{2\omega_1}\right)^2,\\
\log\sigma_3 u &= \frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1} + \sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{r}}{r(1-q^{2r})}\left(2\sin\frac{r\pi u}{2\omega_1}\right)^2;
\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\zeta u - \frac{\eta_1 u}{\omega_1} - \frac{\pi}{2\omega_1}\cot\frac{\pi u}{2\omega_1} &= \frac{2\pi}{\omega_1}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{2r}}{1-q^{2r}}\sin\frac{r\pi u}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{q^{2s}\sin\dfrac{\pi u}{\omega_1}}{1-2q^{2s}\cos\dfrac{\pi u}{\omega_1}+q^{4s}},\\
\zeta_1 u - \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1}\cot\frac{\pi u}{2\omega_1} &= \frac{2\pi}{\omega_1}\sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^r\frac{q^{2r}}{1-q^{2r}}\sin\frac{r\pi u}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{-q^{2s}\sin\dfrac{\pi u}{\omega_1}}{1+2q^{2s}\cos\dfrac{\pi u}{\omega_1}+q^{4s}},\\
\zeta_2 u - \frac{\eta_1 u}{\omega_1} &= \frac{2\pi}{\omega_1}\sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^r\frac{q^{r}}{1-q^{2r}}\sin\frac{r\pi u}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{-q^{2s-1}\sin\dfrac{\pi u}{\omega_1}}{1+2q^{2s-1}\cos\dfrac{\pi u}{\omega_1}+q^{4s-2}},\\
\zeta_3 u - \frac{\eta_1 u}{\omega_1} &= \frac{2\pi}{\omega_1}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{r}}{1-q^{2r}}\sin\frac{r\pi u}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{q^{2s-1}\sin\dfrac{\pi u}{\omega_1}}{1-2q^{2s-1}\cos\dfrac{\pi u}{\omega_1}+q^{4s-2}};
\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{p}u &= -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\operatorname{coséc}^2\frac{\pi u}{2\omega_1} - \frac{2\pi^2}{\omega_1^2}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{rq^{2r}}{1-q^{2r}}\cos\frac{r\pi u}{\omega_1},\\
\mathrm{p}(u+\omega_1) &= -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\operatorname{séc}^2\frac{\pi u}{2\omega_1} - \frac{2\pi^2}{\omega_1^2}\sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^r\frac{rq^{2r}}{1-q^{2r}}\cos\frac{r\pi u}{\omega_1},\\
\mathrm{p}(u+\omega_2) &= -\frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{2\pi^2}{\omega_1^2}\sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^r\frac{rq^{r}}{1-q^{2r}}\cos\frac{r\pi u}{\omega_1},\\
\mathrm{p}(u+\omega_3) &= -\frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{2\pi^2}{\omega_1^2}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{rq^{r}}{1-q^{2r}}\cos\frac{r\pi u}{\omega_1}.
\end{aligned}\right.$$

CVII.

Dans les formules suivantes relatives aux $\mathfrak{I}$, on n'a écrit qu'une formule sur quatre, les autres se déduisant de celle-là par l'addition de $\frac{1}{2}$ soit à v, soit à w, soit à chacune de ces variables. D'ailleurs on déduit aussi aisément les quatre formules relatives aux $\mathfrak{I}$ des quatre formules relatives aux ρ que l'on a écrites. Le symbole $\mathcal{R}(a)$ veut dire *partie réelle* de a.

(1).

$$|q| < |x| < \frac{1}{|q|}.$$

$$\frac{\rho'_1(1)\rho_1(xy)}{\rho_1(x)\rho_1(y)} = \frac{x+x^{-1}}{x-x^{-1}} + \frac{y+y^{-1}}{y-y^{-1}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n}x^{-2n}y^{-2}}{1-y^{-2}q^{2n}} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n}x^{2n}y^2}{1-y^2q^{2n}},$$

$$-\frac{\rho'_1(1)\rho_1(xy)}{\rho_2(x)\rho_2(y)} = \frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}} + \frac{y-y^{-1}}{y+y^{-1}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1} \frac{q^{2n}x^{-2n}y^{-2}}{1+y^{-2}q^{2n}} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1} \frac{q^{2n}x^{2n}y^2}{1+y^2q^{2n}},$$

$$\frac{\rho'_1(1)\rho_2(xy)}{\rho_1(x)\rho_2(y)} = \frac{x+x^{-1}}{x-x^{-1}} + \frac{y-y^{-1}}{y+y^{-1}} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n}x^{-2n}y^{-2}}{1+y^{-2}q^{2n}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n}x^{2n}y^2}{1+y^2q^{2n}},$$

$$\frac{\rho'_1(1)\rho_2(xy)}{\rho_2(x)\rho_1(y)} = \frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}} + \frac{y+y^{-1}}{y-y^{-1}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n \frac{q^{2n}x^{-2n}y^{-2}}{1-y^{-2}q^{2n}} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n \frac{q^{2n}x^{2n}y^2}{1-y^2q^{2n}}.$$

$$-\mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{v}{i}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right).$$

$$\frac{\mathfrak{I}'_1(0)\,\mathfrak{I}_1(v+w)}{4\pi\mathfrak{I}_1(v)\,\mathfrak{I}_1(w)} - \frac{1}{4}\left[\cot\pi v + \cot\pi w\right] = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n}\sin 2\pi(nv-w) - q^{4n}\sin 2n\pi v}{1-2q^{2n}\cos 2\pi w + q^{4n}}.$$

(2).

$$|q| < |x| < \frac{1}{|q|}.$$

$$\frac{\rho'_1(1)\rho_3(xy)}{\rho_1(x)\rho_3(y)} = \frac{2}{x-x^{-1}} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n-1}x^{-2n+1}y^{-2}}{1+y^{-2}q^{2n-1}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n-1}x^{2n-1}y^2}{1+y^2q^{2n-1}}.$$

$$i\,\frac{\rho'_1(1)\rho_3(xy)}{\rho_2(x)\rho_4(y)} = \frac{2}{x+x^{-1}} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n \frac{q^{2n-1}x^{-2n+1}y^{-2}}{1-y^{-2}q^{2n-1}} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n \frac{q^{2n-1}x^{2n-1}y^2}{1-y^2q^{2n-1}},$$

CVII (suite).

(2) [*suite*].

$$\frac{\rho'_1(1)\rho_4(xy)}{\rho_1(x)\rho_4(y)} = \frac{2}{x-x^{-1}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{2n-1}x^{-2n+1}y^{-2}}{1-y^{-2}q^{2n-1}} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{2n-1}x^{2n-1}y^{2}}{1-y^{2}q^{2n-1}},$$

$$i\,\frac{\rho'_1(1)\rho_4(xy)}{\rho_2(x)\rho_3(y)} = \frac{2}{x+x^{-1}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{q^{2n-1}x^{-2n+1}y^{-2}}{1+y^{-2}q^{2n-1}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{q^{2n-1}x^{2n-1}y^{2}}{1+y^{2}q^{2n-1}}.$$

$$-\mathfrak{R}\left(\frac{\tau}{i}\right) < \mathfrak{R}\left(\frac{v}{i}\right) < \mathfrak{R}\left(\frac{\tau}{i}\right).$$

$$\frac{\mathfrak{S}'_1(0)\mathfrak{S}_3(v+w)}{4\pi\mathfrak{S}_1(v)\mathfrak{S}_3(w)} = \frac{1}{4\sin\pi v} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{2n-1}\sin\pi[(2n-1)v+2w] + q^{4n-2}\sin(2n-1)\pi v}{1+2q^{2n-1}\cos 2\pi w + q^{4n-2}}.$$

(3).

$$\sqrt{|q|} < |x| < \frac{1}{\sqrt{|q|}}.$$

$$-\frac{\rho'_1(1)\rho_1(xy)}{\rho_3(x)\rho_3(y)} = 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}}x^{-2n+1}y^{-1}}{1+y^{-2}q^{2n-1}} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}}x^{2n-1}y}{1+y^{2}q^{2n-1}},$$

$$\frac{\rho'_1(1)\rho_1(xy)}{\rho_4(x)\rho_4(y)} = 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}x^{-2n+1}y^{-1}}{1-y^{-2}q^{2n-1}} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}x^{2n-1}y}{1-y^{2}q^{2n-1}},$$

$$-i\,\frac{\rho'_1(1)\rho_2(xy)}{\rho_3(x)\rho_4(y)} = 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}}x^{-2n+1}y^{-1}}{1-y^{-2}q^{2n-1}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}}x^{2n-1}y}{1-y^{2}q^{2n-1}},$$

$$i\,\frac{\rho'_1(1)\rho_2(xy)}{\rho_4(x)\rho_3(y)} = 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}x^{-2n+1}y^{-1}}{1+y^{-2}q^{2n-1}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}x^{2n-1}y}{1+y^{2}q^{2n-1}}.$$

$$-\mathfrak{R}\left(\frac{\tau}{i}\right) < 2\mathfrak{R}\left(\frac{v}{i}\right) < \mathfrak{R}\left(\frac{\tau}{i}\right).$$

$$\frac{\mathfrak{S}'_1(0)\mathfrak{S}_1(v+w)}{4\pi\mathfrak{S}_3(v)\mathfrak{S}_3(w)} = \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}\sin\pi[(2n-1)v+w] + q^{3n-\frac{3}{2}}\sin\pi[(2n-1)v-w]}{1+2q^{2n-1}\cos 2\pi w + q^{4n-2}}.$$

CVII (suite).

(4).

$$\sqrt{|q|} < |x| < \frac{1}{\sqrt{|q|}}.$$

$$\frac{\rho_1'(1)\,\rho_3(xy)}{\rho_3(x)\,\rho_1(y)} = \frac{2}{y-y^{-1}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n q^n x^{-2n} y^{-1}}{1-y^{-2}q^{2n}} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n q^n x^{2n} y}{1-y^2 q^{2n}},$$

$$i\,\frac{\rho_1'(1)\,\rho_3(xy)}{\rho_4(x)\,\rho_2(y)} = \frac{2}{y+y^{-1}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n x^{-2n} y^{-1}}{1+y^{-2}q^{2n}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n x^{2n} y}{1+y^2 q^{2n}},$$

$$i\,\frac{\rho_1'(1)\,\rho_4(xy)}{\rho_3(x)\,\rho_2(y)} = \frac{2}{y+y^{-1}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n q^n x^{-2n} y^{-1}}{1+y^{-2}q^{2n}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n q^n x^{2n} y}{1+y^2 q^{2n}},$$

$$\frac{\rho_1'(1)\,\rho_4(xy)}{\rho_4(x)\,\rho_1(y)} = \frac{2}{y-y^{-1}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n x^{-2n} y^{-1}}{1-y^{-2}q^{2n}} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n x^{2n} y}{1-y^2 q^{2n}}.$$

$$-\mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right) < 2\mathcal{R}\left(\frac{v}{i}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right).$$

$$\frac{\mathfrak{S}_1'(0)\,\mathfrak{S}_3(v+w)}{4\pi\,\mathfrak{S}_3(v)\,\mathfrak{S}_1(w)} = \frac{1}{4\sin w\pi} + \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n q^n\,\frac{\sin\pi(2nv+w) - q^{2n}\sin(2nv-w)\pi}{1-2q^{2n}\cos 2w\pi + q^{4n}}.$$

(5).

$$-\mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{v}{i}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right); \quad -\mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{w}{i}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right).$$

$$\frac{\mathfrak{S}_1'(0)\,\mathfrak{S}_1(v+w)}{4\pi\,\mathfrak{S}_1(v)\,\mathfrak{S}_1(w)} - \frac{1}{4}(\cot v\pi + \cot w\pi) = \sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{2mn}\sin 2\pi(mw+nv).$$

(6).

$$-\mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{v}{i}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right); \quad -\mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{w}{i}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right).$$

$$\frac{\mathfrak{S}_1'(0)\,\mathfrak{S}_3(v+w)}{4\pi\,\mathfrak{S}_1(v)\,\mathfrak{S}_3(w)} - \frac{1}{4\sin v\pi} = \sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^m q^{m(2n-1)}\sin\pi[2mw+(2n-1)v].$$

(7).

$$-\mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right) < 2\mathcal{R}\left(\frac{v}{i}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right); \quad -\mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right) < 2\mathcal{R}\left(\frac{w}{i}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right).$$

$$\frac{\mathfrak{S}_1'(0)\,\mathfrak{S}_1(v+w)}{4\pi\,\mathfrak{S}_3(v)\,\mathfrak{S}_3(w)} = \sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{m+n} q^{\frac{(2m-1)(2n-1)}{2}}\sin\pi[(2m-1)w+(2n-1)v].$$

CVIII.

Dans les formules suivantes, on n'a écrit qu'une formule sur deux, les formules non écrites se déduisant des formules écrites en ajoutant $\frac{1}{2}$ à la variable v.

(1).

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\mathfrak{I}_1'(0)\mathfrak{I}_1(v)}{\mathfrak{I}_2(0)\mathfrak{I}_2(v)}-\frac{1}{4}\operatorname{tg}\pi v=\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\sin 2n\pi v=\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1^n)\frac{q^{2n}\sin 2\pi v}{1+2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}},$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\mathfrak{I}_1'(0)\mathfrak{I}_4(v)}{\mathfrak{I}_2(0)\mathfrak{I}_3(v)}-\frac{1}{4}=\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{q^{n}}{1+q^{2n}}\cos 2n\pi v=\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}}{1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}}.$$

(2).

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\mathfrak{I}_1'(0)\mathfrak{I}_3(v)}{\mathfrak{I}_3(0)\mathfrak{I}_1(v)}-\frac{1}{4\sin\pi v}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\sin(2n-1)\pi v=\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{(1+q^{2n})q^n\sin\pi v}{1-2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}},$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\mathfrak{I}_1'(0)\mathfrak{I}_1(v)}{\mathfrak{I}_3(0)\mathfrak{I}_3(v)}=\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}}\sin(2n-1)\pi v=\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1-q^{2n-1})q^{n-\frac{1}{2}}\sin\pi v}{1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}}.$$

(3).

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\mathfrak{I}_1'(0)\mathfrak{I}_4(v)}{\mathfrak{I}_4(0)\mathfrak{I}_1(v)}-\frac{1}{4\sin\pi v}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\sin(2n-1)\pi v=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(1+q^{2n})q^n\sin\pi v}{1-2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}},$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\mathfrak{I}_1'(0)\mathfrak{I}_1(v)}{\mathfrak{I}_4(0)\mathfrak{I}_4(v)}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}}\sin(2n-1)\pi v=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(1+q^{2n-1})q^{n-\frac{1}{2}}\sin\pi v}{1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}},$$

Les seconds membres de la première de chacune des égalités $(\text{CVIII}_{1,2,3})$ convergent pour $-\mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right)<\mathcal{R}\left(\frac{v}{i}\right)<\mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right)$; les seconds membres des dernières égalités$(\text{CVIII}_{1,2,3})$ convergent pour $-\mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right)<2\mathcal{R}\left(\frac{v}{i}\right)<\mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right)$. Les derniers membres de toutes les égalités $(\text{CVIII}_{1,2,3})$ convergent quel que soit v.

CIX.

Dans ce Tableau on n'a écrit qu'une formule sur deux; les formules que l'on n'a pas écrites se déduisent de celles que l'on a écrites en ajoutant $\frac{1}{2}$ à la variable v.

(1).

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\mathfrak{I}_1'(0)}{\mathfrak{I}_1(v)} - \frac{1}{4\sin\pi v} = \sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n q^{n(n+2m-1)}\sin(2n-1)\pi v$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{-q^{2n}\sin(2n-1)\pi v + q^{4n}\sin 2n\pi v}{1-2q^{2n}\cos\pi v + q^{4n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{2n-1}\sin(2n-2)\pi v - q^{4n-2}\sin(2n-1)\pi v}{1-2q^{2n-1}\cos\pi v + q^{4n-2}}$$

$$= \sin\pi v\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{q^{n^2+n}+q^{n^2+3n}}{1-q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}};$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\mathfrak{I}_1'(0)}{\mathfrak{I}_3(v)} = \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{m+n} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+2m\left(n+\frac{1}{2}\right)}(x^{2m}+x^{-2m})$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\frac{1-q^{4n-2}}{1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2}}.$$

(2).

$$\frac{1}{4\pi^2}\frac{\mathfrak{I}_1'^2(0)}{\mathfrak{I}_1^2(v)} = \frac{1}{4\sin^2\pi v} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty} nq^{2n}\frac{\cos(2n-2)\pi v - q^{2n}\cos 2n\pi v}{1-2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}},$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\frac{\mathfrak{I}_1'^2(0)}{\mathfrak{I}_3^2(v)} = q^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)q^n\frac{\cos(2n-2)\pi v + q^{2n-1}\cos 2n\pi v}{1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2}},$$

Les formules (CIX_1) concernant $\frac{\mathfrak{I}_1'(0)}{\mathfrak{I}_1(v)}$ et $\frac{\mathfrak{I}_1'(0)}{\mathfrak{I}_2(v)}$ sont convergentes pour $-\mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{v}{i}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right)$; celles concernant $\frac{\mathfrak{I}_1'(0)}{\mathfrak{I}_3(v)}$ et $\frac{\mathfrak{I}_1'(0)}{\mathfrak{I}_4(v)}$ sont convergentes pour $-\mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right) < 2\mathcal{R}\left(\frac{v}{i}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{\tau}{i}\right)$.

CX.

(1)
$$\left\{\begin{aligned}
e_1 &= \frac{\pi^2}{6\omega_1^2} + \frac{4\pi^2}{\omega_1^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}(2n-1)\frac{q^{4n-2}}{1-q^{4n-2}},\\
e_2 &= -\frac{\pi^2}{12\omega_1^2} - \frac{2\pi^2}{\omega_1^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{nq^n}{1+(-1)^n q^n},\\
e_3 &= -\frac{\pi^2}{12\omega_1^2} - \frac{2\pi^2}{\omega_1^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^n}{1+q^n}.
\end{aligned}\right.$$

(2)
$$\eta_1 = \frac{\pi^2}{12\omega_1} - \frac{2\pi^2}{\omega_1}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}.$$

(3)
$$\left\{\begin{aligned}
\frac{g_2}{20} &= \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^4\left(\frac{1}{3.5} + 2^4\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{r^3 q^{2r}}{1-q^{2r}}\right),\\
\frac{g_3}{28} &= \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^6\left(\frac{2}{3^3.7} - \frac{2^4}{3}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{r^5 q^{2r}}{1-q^{2r}}\right).
\end{aligned}\right.$$

(4)
$$\left\{\begin{aligned}
\frac{2K}{\pi} &= 1 + 4\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}} = 1 + 4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\\
&= \frac{1+q}{1-q} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1-q^{2n-1}} - \frac{1}{1-q^{2n+1}}\right).
\end{aligned}\right.$$

(5)
$$\left\{\begin{aligned}
\frac{2K}{\pi}\sqrt{k} &= 2q^{\frac14}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{1+q^{n-\frac12}} = 2q^{\frac14}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{1-q^{n-\frac12}}\\
&= 2q^{\frac14}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}q^{n(n-1)}\frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\\
&= 2q^{\frac14}\sum_{n=1}^{n=\infty}q^{n-1}\left(\frac{1}{1-q^{4n-3}} - \frac{q^{2n}}{1-q^{4n-1}}\right).
\end{aligned}\right.$$

(6)
$$\left\{\begin{aligned}
\frac{2K}{\pi}\sqrt{k'} &= 1 + 4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{q^{2n}}{1+q^{4n}} = 1 + 4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{q^{4n-2}}{1+q^{4n-2}}\\
&= 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}q^{n(n-1)}\frac{1-q^{4n-2}}{(1+q^{2n})(1+q^{2n-2})}.
\end{aligned}\right.$$

CX (SUITE).

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{2K}{\pi}\sqrt{k}\sqrt{k'} &= 2q^{\frac{1}{4}}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}q^{n(n-1)}\,\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\\ &= 2q^{\frac{1}{4}}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n}q^{n-1}\left(\frac{q^{2n}}{1+q^{4n-1}}-\frac{1}{1+q^{4n-3}}\right).\end{aligned}\right.$$

$$(8)\qquad \frac{2K}{\pi}k = 4\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}} = 4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}}.$$

$$(9)\qquad \frac{2K}{\pi}k' = 1+4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n}\,\frac{q^{n}}{1+q^{2n}} = 1+4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n}\,\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}.$$

$$(10)\qquad \frac{4K^2}{\pi^2}k = 4\sum_{n=1}^{n=\infty}(2n-1)\,\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}} = 4\sum_{n=1}^{n=\infty}q^{n-\frac{1}{2}}\,\frac{1+q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}.$$

$$(11)\qquad \frac{4K^2}{\pi^2}k' = 1+8\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n}\,\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2} = 1+8\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n}\,\frac{nq^{2n}}{1+q^{2n}}.$$

$$(12)\qquad \frac{4K^2}{\pi^2}kk' = 4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)\,\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}} = 4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}q^{n-\frac{1}{2}}\,\frac{1-q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}.$$

Intégrales des fonctions doublement périodiques.

CXI.

$$J_n = \int \mathrm{p}^n u\,du.$$

$$J_1 = -\zeta u;\qquad J_2 = \frac{\mathrm{p}'u}{3!}+\frac{g_2 u}{2^2.3};\qquad J_3 = \frac{\mathrm{p}'''u}{5!}-\frac{3g_2}{2^2.5}\zeta u+\frac{g_3 u}{2.5};$$

$$J_4 = \frac{\mathrm{p}^{(\mathrm{v})}u}{7!}+\frac{g_2}{5}\,\frac{\mathrm{p}'u}{3!}-\frac{g_3}{7}\zeta u+\frac{5g_2^2 u}{2^4.3.7};$$

$$J_5 = \frac{\mathrm{p}^{(\mathrm{vii})}u}{9!}+\frac{g_2}{2^2}\,\frac{\mathrm{p}'''u}{5!}+\frac{5g_3}{2^2.7}\,\frac{\mathrm{p}'u}{3!}-\frac{7g_2^2}{2^4.3.5}\zeta u+\frac{g_2 g_3 u}{2.3.5};$$

$$J_6 = \frac{\mathrm{p}^{(\mathrm{ix})}u}{11!}+\frac{3g_2}{2.5}\,\frac{\mathrm{p}^{(\mathrm{v})}u}{7!}+\frac{3g_3}{2.7}\,\frac{\mathrm{p}'''u}{5!}+\frac{17g_2^2}{2^4.5^2}\,\frac{\mathrm{p}'u}{3!}-\frac{3.29\,g_2g_3}{2^2.5.7.11}\zeta u+\left(\frac{3.5g_2^3}{2^6.7.11}+\frac{g_3^2}{5.11}\right)u;$$

$$\begin{aligned} J_7 = \frac{\mathrm{p}^{(\mathrm{xi})}u}{13!}&+\frac{7g_2}{2^2.5}\,\frac{\mathrm{p}^{(\mathrm{vii})}u}{9!}+\frac{g_3}{2^2}\,\frac{\mathrm{p}^{(\mathrm{v})}u}{7!}+\frac{7g_2^2}{2^3.3.5}\,\frac{\mathrm{p}'''u}{5!}+\frac{3.23\,g_2g_3}{2^4.5.11}\,\frac{\mathrm{p}'u}{3!}\\ &-\left(\frac{7.11\,g_2^3}{2^6.3.5.13}+\frac{5g_3^2}{2.7.13}\right)\zeta u+\frac{433\,g_2^2g_3 u}{2^5.3.5.7.13};\end{aligned}$$

CXI (suite).

$$J_8 = \frac{p^{(\text{XIII})}u}{15!} + \frac{2g_2}{5}\frac{p^{(\text{IX})}u}{11!} + \frac{2g_3}{7}\frac{p^{(\text{VII})}u}{9!} + \frac{23g_2^2}{2^2.3.5^2}\frac{p^{(\text{V})}u}{7!} + \frac{2^3 g_2 g_3}{7.11}\frac{p'''u}{5!}$$
$$+\left(\frac{61g_2^3}{2^2.5^3.13} + \frac{3.31g_3^2}{2^2.7^2.13}\right)\frac{p'u}{3!} - \frac{167g_2^2g_3}{2^3.3.5.7.11}\zeta u + \left(\frac{13g_2^4}{2^8.7.11} + \frac{7g_2g_3^2}{2^2.3.5.11}\right)u;$$

$$J_9 = \frac{p^{(\text{XV})}u}{17!} + \frac{3^2g_2}{2^2.5}\frac{p^{(\text{XI})}u}{13!} + \frac{3^2g_3}{2^2.7}\frac{p^{(\text{IX})}u}{11!} + \frac{3.13g_2^2}{2^4.5^2}\frac{p^{(\text{VII})}u}{9!} + \frac{3^2.13g_2g_3}{2^4.5.11}\frac{p^{(\text{V})}u}{7!}$$
$$+\left(\frac{3.47g_2^3}{2^5.5^2.13} + \frac{3^2.53g_3^2}{2^4.7^2.13}\right)\frac{p'''u}{5!} + \frac{3^2.181g_2^2g_3}{2^5.5^2.7.11}\frac{p'u}{3!}$$
$$-\left(\frac{7.11g_2^4}{2^8.13.17} + \frac{3^3.223g_2g_3^2}{2^2.5.7.11.13.17}\right)\zeta u + \left(\frac{7g_3^3}{2.5.11.17} + \frac{383g_2^3g_3}{2^3.7.11.13.17}\right)u;$$

$$J_{10} = \frac{p^{(\text{XVII})}u}{19!} + \frac{g_2}{2}\frac{p^{(\text{XIII})}u}{15!} + \frac{5g_3}{2.7}\frac{p^{(\text{XI})}u}{13!} + \frac{29g_2^2}{2^4.3.5}\frac{p^{(\text{IX})}u}{11!} + \frac{3.17g_2g_3}{2^2.7.11}\frac{p^{(\text{VII})}u}{9!}$$
$$+\left(\frac{587g_2^3}{2^5.3.5^2.13} + \frac{5.17g_3^2}{2^4.7.13}\right)\frac{p^{(\text{V})}u}{7!} + \frac{137g_2^2g_3}{2^4.3.7.11}\frac{p'''u}{5!}$$
$$+\left(\frac{31.1453g_2^4}{2^8.3.5^3.13.17} + \frac{3.15871g_2g_3^2}{2^4.7^2.11.13.17}\right)\frac{p'u}{3!}$$
$$\left(\frac{3251g_2^3g_3}{2^5.7.11.13.19} + \frac{2.5g_3^3}{7.13.19}\right)\zeta u + \left(\frac{1357g_2^2g_3^2}{2^4.7.11.13.19} + \frac{13.17g_2^5}{2^{10}.7.11.19}\right)u.$$

$$J_n = \frac{B_0^{(n)}}{(2n-1)!}p^{(2n-3)}u + \frac{B_1^{(n)}}{(2n-3)!}p^{(2n-5)}u + \ldots$$
$$+ \frac{B_r^{(n)}}{(2n-2r-1)!}p^{(2n-2r-3)}u + \ldots + \frac{B_{n-2}^{(n)}}{3!}p'u - B_{n-1}^{(n)}\zeta u + B_n^{(n)}u;$$

où

$$B_r^{(n+1)} = \frac{(2n-2r)(2n-2r+1)}{2n(2n+1)}B_r^{(n)} + \frac{2n-1}{4(2n+1)}B_{r-2}^{(n-1)}g_2 + \frac{n-1}{2(2n+1)}B_{r-3}^{(n-2)}g_3$$
$$(r = 0, 1, 2, \ldots, n+1); \qquad B_r^{(n)} = 0 \quad \text{pour} \quad r < 0 \quad \text{et pour} \quad r > n.$$

CXII.

(1).

$$J_n = \int \frac{du}{(pu - pv)^n}.$$

$$\log\frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)} = -2u\zeta v + p'v.J_1,$$
$$-\tfrac{1}{2}\zeta(u-v) - \tfrac{1}{2}\zeta(u+v) = A_0^{(0)}u + A_1^{(0)}J_1 + A_2^{(0)}J_2,$$
$$\tfrac{1}{2}p(u-v) - \tfrac{1}{2}p(u+v) = A_0^{(1)}u + A_1^{(1)}J_1 + A_2^{(1)}J_2 + A_3^{(1)}J_3,$$
$$\tfrac{1}{2}p'(u-v) + \tfrac{1}{2}p'(u+v) = A_0^{(2)}u + A_1^{(2)}J_1 + A_2^{(2)}J_2 + A_3^{(2)}J_3 + A_4^{(2)}J_4,$$
$$\tfrac{1}{2}p^{(n)}(u-v) - \tfrac{1}{2}p^{(n)}(-u-v) = A_0^{(n+1)}u + A_1^{(n+1)}J_1 + A_2^{(n+1)}J_2$$
$$+ A_3^{(n+1)}J_3 + A_4^{(n+1)}J_4 + \ldots + A_{n+3}^{(n+1)}J_{n+3}.$$

CXII (SUITE).

(1) [suite].

$$\frac{d^n p(u-v)}{du^n} = A_0^{(n)} + \frac{A_1^{(n)}}{pu - pv} + \frac{A_2^{(n)}}{(pu-pv)^2} + \ldots + \frac{A_{n+2}^{(n)}}{(pu-pv)^{n+2}}$$
$$+ p'u\left[\frac{B_2^{(n)}}{(pu-pv)^2} + \frac{B_3^{(n)}}{(pu-pv)^3} + \ldots + \frac{B_{n+2}^{(n)}}{(pu-pv)^{n+2}}\right].$$

$A_0^{(0)} = pv$, $\quad A_1^{(0)} = \frac{1}{2} p''v$, $\quad A_2^{(0)} = \frac{1}{2} p'^2 v$, $\quad B_2^{(0)} = \frac{1}{2} p'v$,

$A_0^{(1)} = -p'v$, $\quad A_1^{(1)} = -\frac{1}{2} p'''v$, $\quad A_2^{(1)} = -\frac{3}{2} p'v\, p''v$, $\quad A_3^{(1)} = -p'^3 v$,

$A_0^{(2)} = p''v$, $\quad A_1^{(2)} = \frac{1}{2} p^{(\text{IV})} v$, $\quad A_2^{(2)} = \frac{3}{2} p''^2 v + 24 p'^2 v\, pv$,

$A_3^{(2)} = 6 p''v\, p'^2 v$, $\quad A_4^{(2)} = 3 p'^4 v$,

$A_0^{(3)} = -p'''v$, $\quad A_1^{(3)} = -\frac{1}{2} p^{(\text{V})} v$, $\quad A_2^{(3)} = -\frac{1}{24} p^{(\text{VII})} v + \frac{1}{2} p^{(\text{V})} v\, pv$,

$A_3^{(3)} = -15 p'v (p''^2 v + 8 p'^2 v\, pv)$, $\quad A_4^{(3)} = -30 p''v\, p'^3 v$, $\quad A_5^{(3)} = -12 p'^5 v$.

$B_\nu^{(n+1)} = (1-\nu) A_{\nu-1}^{(n)}$;

$A_\nu^{(n+1)} = -2(2\nu+1) B_{\nu+2}^{(n)} - 12\nu\, pv\, B_{\nu+1}^{(n)} + (1-2\nu) p''v\, B_\nu^{(n)} + (1-\nu) p'^2 v\, B_{\nu-1}^{(n)}$;

$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n+3)$; $\quad B_\nu^{(n)} = 0$ pour $\nu < 2$ et pour $\nu > n+2$.

(2).

$$J_n = \int \frac{du}{(pu - e_\alpha)^n}.$$

$$A_1^{(0)} = \tfrac{1}{2} p''\omega_\alpha = 3e_\alpha^2 - \frac{g_2}{4} = (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma),$$
$$-\zeta(u - \omega_\alpha) = u e_\alpha + A_1^{(0)} J_1,$$
$$p'(u-\omega_\alpha) = 2u A_1^{(0)} + 12 e_\alpha A_1^{(0)} J_1 + 6(A_1^{(0)})^2 J_2,$$
$$p'''(u-\omega_\alpha) = 24 u e_\alpha A_1^{(0)} + 72(2e_\alpha^2 + A_1^{(0)}) A_1^{(0)} J_1$$
$$+ 360 e_\alpha (A_1^{(0)})^2 J_2 + 120 (A_1^{(0)})^3 J_3.$$

(3).

Si v est une quelconque des solutions de l'équation $pv = -\dfrac{\delta}{\gamma}$, on a

$$\int \frac{\alpha pu + \beta}{\gamma pu + \delta}\, du = \frac{\alpha u}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2} \int \frac{du}{pu - pv}$$
$$= \frac{\alpha u}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 p'v}\,[\log\sigma(u+v) - \log\sigma(u-v) - 2u\zeta v].$$

CXIII.

(1).

Si y est solution de l'équation différentielle $\left(\dfrac{dy}{du}\right)^2 = ay^4 + by^2 + c$,

on a, en posant $J_n = \int y^n \, du$,

$$(2n)!\, a^n J_{2n+1} = \frac{d^{2n-1}y}{du^{2n-1}} + B_1^{(n)} \frac{d^{2n-3}y}{du^{2n-3}} + \ldots + B_{n-1}^{(n)} \frac{dy}{du} + B_n^{(n)} J_1,$$

$$(2n+1)!\, a^n J_{2n+2} = \frac{d^{2n-1}(y^2)}{du^{2n-1}} + \beta_1^{(n)} \frac{d^{2n-3}(y^2)}{du^{2n-3}} + \ldots + \beta_{n-1}^{(n)} \frac{d(y^2)}{du} + \beta_n^{(n)} J_2 + \beta^{(n)}.$$

Voir le Tableau placé à la fin des formules (XCV).

$$B_1^{(1)} = -b, \quad B_1^{(2)} = -2.5b, \quad B_2^{(2)} = 3^2 b^2 - 2^2.3\,ac, \quad B_1^{(3)} = -5.7b,$$

$$B_2^{(3)} = 7.37\,b^2 - 2^2.3^2.7\,ac, \quad B_3^{(3)} = -3^2.5^2 b^3 + 2^2.3^3.5\,abc,$$

$$B_1^{(4)} = -2^2.3.7\,b, \quad B_2^{(4)} = -2^3.3^3.7\,ac + 2.3.7.47\,b^2,$$

$$B_3^{(4)} = -4.3229\,b^3 + 2^4.3^3.59\,abc, \quad B_4^{(4)} = -2^3.3^3.5^2.7\,ab^2c + 2^4.3^2.5.7\,a^2c^2 + 3^2.5^2.7^2\,b^4;$$

$$B_r^{(n)} = B_r^{(n-1)} - (2n-1)^2 b\, B_{r-1}^{(n-1)} - (2n-2)^2(2n-3)(2n-1)\,ac\, B_{r-2}^{(n-2)},$$

$$(r = 0, 1, 2, \ldots, n); \quad B_0^{(n)} = 1, \quad B_r^{(n)} = 0 \text{ pour } r < 0 \text{ et pour } r > n.$$

$$\beta_1^{(1)} = -4b, \quad \beta_1^{(2)} = -2^2.5b, \quad \beta_2^{(2)} = 2^6 b^2 - 2^3.3^2\,ac, \quad \beta_1^{(3)} = -2^3.7b,$$

$$\beta_2^{(3)} = 2^4.7^2 b^2 - 2^5.3.7\,ac, \quad \beta_3^{(3)} = -2^8.3^2 b^3 + 2^7.3.13\,abc,$$

$$\beta_1^{(4)} = -2^3.3.5\,b, \quad \beta_2^{(4)} = 2^4.3.7.13\,b^2 - 2^4.3^3.7\,ac,$$

$$\beta_3^{(4)} = -2^8.5.41\,b^3 + 2^6.3^3.5.11\,abc, \quad \beta_4^{(4)} = 2^{14}.3^2 b^4 - 2^{10}.3^3.17\,ab^2c + 2^7.3^3.7^2\,a^2c^2;$$

$$\beta_r^{(n)} = \beta_r^{(n-1)} - 4n^2 b\, \beta_{r-1}^{(n-1)} - 2n(2n-1)^2(2n-2)\,ac\, \beta_{r-2}^{(n-2)},$$

$$(r = 0, 1, 2, \ldots, n); \quad \beta_0^{(n)} = 1, \quad \beta_r^{(n)} = 0 \text{ pour } r < 0 \text{ et pour } r > n.$$

$$\beta^{(1)} = -2c, \quad \beta^{(2)} = 2^5 bc, \quad \beta^{(3)} = -2^7.3^2 b^2 c + 2^4.3.5^2\,ac^2,$$

$$\beta^{(4)} = 2^{13}.3^2 b^2 c + 2^4.3.5^2\,ac^2;$$

$$\beta^{(n)} = -4n^2 b\, \beta^{(n-1)} - 2n(2n-1)^2(2n-2)\,ac\, \beta^{(n-2)}.$$

---

(2).

$$\int \xi_{\alpha 0}(u)\,du = \log[\xi_{\gamma 0}(u) - \xi_{\beta 0}(u)], \qquad \int \xi_{\alpha 0}^2(u)\,du = -e_\alpha u - \zeta(u).$$

$$\int \xi_{0\alpha}(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}} \log\left[\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}\,\xi_{\beta\alpha}(u) + \sqrt{e_\alpha - e_\beta}\,\xi_{\gamma\alpha}(u)\right],$$

$$\int \xi_{0\alpha}^2(u)\,du = -\frac{e_\alpha u + \zeta_\alpha u}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}.$$

$$\int \xi_{\alpha\beta}(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{e_\beta - e_\gamma}} \log\left[\xi_{\gamma\beta}(u) + \sqrt{e_\beta - e_\gamma}\,\xi_{0\beta}(u)\right], \qquad \int \xi_{\alpha\beta}^2(u)\,du = \frac{e_\gamma u + \zeta_\beta u}{e_\gamma - e_\beta}.$$

CXIV.

$$\int \xi_{0\alpha}(u)\,\xi_{0\beta}(u)\,du = \frac{1}{e_\alpha - e_\beta}\int \xi_{\beta\alpha}(u)\,du - \frac{1}{e_\alpha - e_\beta}\int \xi_{\alpha\beta}(u)\,du,$$

$$\int \xi_{0\alpha}(u)\,\xi_{\beta\alpha}(u)\,du = \frac{1}{e_\alpha - e_\gamma}\,\xi_{\gamma\alpha}(u),$$

$$\int \xi_{0\alpha}(u)\,\xi_{\beta\gamma}(u)\,du = \frac{1}{e_\alpha - e_\gamma}\log\xi_{\gamma\alpha}(u),$$

$$\int \xi_{\alpha 0}(u)\,\xi_{\beta 0}(u)\,du = -\,\xi_{\gamma 0}(u),$$

$$\int \xi_{\alpha 0}(u)\,\xi_{\alpha\beta}(u)\,du = \int \xi_{\beta 0}(u)\,du + (e_\beta - e_\alpha)\int \xi_{0\beta}(u)\,du,$$

$$\int \xi_{\alpha 0}(u)\,\xi_{\beta\gamma}(u)\,du = \log\xi_{0\gamma}(u),$$

$$\int \xi_{\alpha\beta}(u)\,\xi_{\alpha\gamma}(u)\,du = \frac{e_\alpha - e_\gamma}{e_\beta - e_\gamma}\int \xi_{\beta\gamma}(u)\,du - \frac{e_\alpha - e_\beta}{e_\beta - e_\gamma}\int \xi_{\gamma\beta}(u)\,du,$$

$$\int \xi_{\alpha\beta}(u)\,\xi_{\gamma\beta}(u)\,du = \xi_{0\beta}(u).$$

CXV.

(1).

$$\int \operatorname{sn} u\,du = -\frac{1}{k}\log(\operatorname{dn} u + k\operatorname{cn} u), \qquad \int \operatorname{cn} u\,du = \frac{i}{k}\log(\operatorname{dn} u - ik\operatorname{sn} u),$$

$$\int \operatorname{dn} u\,du = i\log(\operatorname{cn} u - i\operatorname{sn} u), \qquad \int \frac{du}{\operatorname{sn} u} = \log\frac{\operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u},$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{cn} u} = \frac{1}{k'}\log\frac{\operatorname{dn} u + k'\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \qquad \int \frac{du}{\operatorname{dn} u} = \frac{1}{ik'}\log\frac{\operatorname{cn} u + ik'\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}.$$

(2).

$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}\,du = \frac{1}{k'}\log\frac{\operatorname{dn} u + k'}{\operatorname{cn} u}, \qquad \int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}\,du = \frac{i}{kk'}\log\frac{ik' - k\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}\,du = -\frac{1}{k}\log\frac{1 - k\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}\,du = \log\frac{1 - \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u},$$

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}\,du = \log\frac{1 - \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \qquad \int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\,du = \log\frac{1 + \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}.$$

CXV (SUITE).

(3).

$$\int \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \, du = -\frac{1}{k^2} \operatorname{dn} u, \qquad \int \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \, du = -\operatorname{cn} u,$$

$$\int \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \, du = \operatorname{sn} u, \qquad \int \frac{du}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u} = \int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u} du + \int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} du,$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} = \int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} du + k^2 \int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} du, \qquad \int \frac{du}{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} = \frac{1}{k'^2} \int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} du - \frac{k^2}{k'^2} \int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} du$$

(4).

$$\int \operatorname{sn}^2 u \, du = \frac{u}{k^2} Z'(0) - \frac{1}{k^2} \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}, \qquad \int \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u} = u Z'(0) - \frac{H'(u)}{H(u)},$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{cn}^2 u} = \frac{u}{k'^2} Z'(K) - \frac{1}{k'^2} \frac{H'_1(u)}{H_1(u)}, \qquad \int \frac{du}{\operatorname{dn}^2 u} = \frac{u}{k'^2} \frac{E}{K} + \frac{1}{k'^2} \frac{\Theta'_1(u)}{\Theta_1(u)}.$$

(5).

$$\int \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} du = \log \operatorname{sn} u, \qquad \int \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} du = -\log \operatorname{cn} u,$$

$$\int \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} du = -\frac{1}{k^2} \log \operatorname{dn} u, \qquad \int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} du = \frac{1}{k'^2} \log \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u},$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} du = \log \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u} du = \log \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}.$$

(6).

$$\int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}^2 u} du = \frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}, \qquad \int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u} du = -\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u},$$

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u} du = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \qquad \int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn}^2 u} du = -\frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u} du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u} du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}.$$

CXVI.

$$(1)\qquad \xi_{0\alpha}'(u_0)\int\frac{du}{\xi_{0\alpha}(u)-\xi_{0\alpha}(u_0)}=u\zeta_\alpha u_0+\log\frac{\sigma\dfrac{u-u_0}{2}\sigma_\alpha\dfrac{u-u_0}{2}}{\sigma_\beta\dfrac{u+u_0}{2}\sigma_\gamma\dfrac{u+u_0}{2}},$$

$$(2)\qquad \xi_{\alpha 0}'(u_0)\int\frac{du}{\xi_{\alpha 0}(u)-\xi_{\alpha 0}(u_0)}=u\zeta\, u_0+\log\frac{\sigma\dfrac{u-u_0}{2}\sigma_\alpha\dfrac{u-u_0}{2}}{\sigma_\beta\dfrac{u+u_0}{2}\sigma_\gamma\dfrac{u+u_0}{2}},$$

$$(3)\qquad \xi_{\beta\gamma}'(u_0)\int\frac{du}{\xi_{\beta\gamma}(u)-\xi_{\beta\gamma}(u_0)}=u\zeta_\gamma u_0+\log\frac{\sigma\dfrac{u-u_0}{2}\sigma_\alpha\dfrac{u-u_0}{2}}{\sigma\dfrac{u+u_0}{2}\sigma_\alpha\dfrac{u+u_0}{2}};$$

$$(4)\qquad \operatorname{sn}'u_0\int\frac{du}{\operatorname{sn}u-\operatorname{sn}u_0}=u\mathrm{Z}(u_0)+\log\frac{\mathrm{H}\dfrac{u-u_0}{2}\Theta\dfrac{u-u_0}{2}}{\mathrm{H}_1\dfrac{u+u_0}{2}\Theta_1\dfrac{u+u_0}{2}},$$

$$(5)\qquad \operatorname{cn}'u_0\int\frac{du}{\operatorname{cn}u-\operatorname{cn}u_0}=u\mathrm{Z}(u_0)+\log\frac{\mathrm{H}\dfrac{u-u_0}{2}\Theta_1\dfrac{u-u_0}{2}}{\mathrm{H}\dfrac{u+u_0}{2}\Theta_1\dfrac{u+u_0}{2}},$$

$$(6)\qquad \operatorname{dn}'u_0\int\frac{du}{\operatorname{dn}u-\operatorname{dn}u_0}=u\mathrm{Z}(u_0)+\log\frac{\mathrm{H}\dfrac{u-u_0}{2}\Theta_1\dfrac{u-u_0}{2}}{\mathrm{H}\dfrac{u+u_0}{2}\Theta_1\dfrac{u+u_0}{2}}.$$

En donnant à la constante u_0 des valeurs convenables, on parvient à des formes nouvelles pour des intégrales antérieurement calculées (CXIII$_2$, CXV).

(7).

Si l'on désigne par $y=f(u)$ l'une quelconque des fonctions $\xi_{0\alpha}(u)$, $\xi_{\alpha 0}(u)$, $\xi_{\beta\gamma}(u)$, $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$, par u_0 une constante, par $y_0, y_0', y_0'', \ldots$ la valeur pour $u=u_0$ de la fonction $f(u)$ et de ses dérivées, enfin par a, b, c [Tableau XCV] les coefficients de l'équation différentielle

$$y'^2=ay^4+by^2+c,$$

que vérifie la fonction $f(u)$, on aura, quel que soit n,

$$\begin{aligned}(n-1)y_0'^2\mathrm{J}_n+(2n-3)y_0''\mathrm{J}_{n-1}+(n-2)(6ay_0^2+b)\mathrm{J}_{n-2}&\\ +(4n-10)ay_0\mathrm{J}_{n-3}+(n-3)a\mathrm{J}_{n-4}&=\frac{-y'}{(y-y_0)^{n-1}},\end{aligned}$$

en posant

$$\mathrm{J}_n=\int\frac{du}{[f(u)-f(u_0)]^n}.$$

CXVII.

On suppose

$$u_0 = 2\alpha\omega_1 + 2\beta\omega_3, \qquad a = 2\alpha'\omega_1 + 2\beta'\omega_3, \qquad v_0 = \frac{u_0}{2\omega_1} = \alpha + \beta\tau,$$

α, β, α', β' étant réels; r, s, ν sont des entiers donnés; r et s sont premiers entre eux, sauf dans lá formule (6). Le chemin d'intégration est supposé ne contenir aucun pôle de la fonction sous le signe $\int$; m, n, N, N' sont des entiers déterminés par les conditions

$$m < \alpha < m+1, \qquad n < \beta < n+1, \qquad \mathrm{N} < \beta r - \alpha s < \mathrm{N}+1,$$
$$\mathrm{N}' < (\beta - \beta')r - (\alpha - \alpha')s < \mathrm{N}'+1.$$

Dans les formules (4) et (5) le logarithme a sa détermination réelle si g_2, g_3, u_0, u_1, a sont réels. Dans la formule (6), $\log \sigma u$ est défini comme une fonction holomorphe de u, le long du chemin allant de u'_0 à u'_1, congru au chemin d'intégration donné.

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{v_0}^{v_0+1} \frac{\mathfrak{I}'_1(v)}{\mathfrak{I}_1(v)}\, dv = -(2n+1)\pi i, \\[2ex] \displaystyle\int_{v_0}^{v_0+\tau} \frac{\mathfrak{I}'_1(v)}{\mathfrak{I}_1(v)}\, dv = -(2v_0+\tau)\pi i + (2m+1)\pi i, \\[2ex] \displaystyle\int_{v_0}^{v_0+\nu(r+s\tau)} \frac{\mathfrak{I}'_1(v)}{\mathfrak{I}_1(v)}\, dv = -\nu\pi i[2\mathrm{N}+1+2sv_0+\nu s(r+s\tau)]; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} \zeta u\, du = 2\eta_1(u_0+\omega_1) - (2n+1)\pi i, \\[2ex] \displaystyle\int_{u_0}^{u_0+2\omega_3} \zeta u\, du = 2\eta_3(u_0+\omega_3) + (2m+1)\pi i, \\[2ex] \displaystyle\int_{u_0}^{u_0+2\nu(r\omega_1+s\omega_3)} \zeta u\, du = 2\nu(r\eta_1+s\eta_3)(u_0+r\nu\omega_1+s\nu\omega_3) - \nu(2\mathrm{N}+1)\pi i; \end{cases}$$

$$(3)\quad \int_{u_0}^{u_0+2r\omega_1+2s\omega_3} \frac{1}{2}\,\frac{p'u+p'a}{pu-pa}\, du = -2a(r\eta_1+s\eta_3) + 2(r\omega_1+s\omega_3)\zeta a + 2(\mathrm{N}-\mathrm{N}')\pi i;$$

$$(4)\qquad \int_{u_0}^{u_1} \zeta(u-a)\, du = \log\frac{\sigma(u_1-a)}{\sigma(u_0-a)};$$

$$(5)\qquad \int_{iu_0}^{iu_1} \zeta[i(u-a);\, g_2, g_3]\, d(iu) = \log\frac{\sigma(u_1-a;\, g_2, -g_3)}{\sigma(u_0-a;\, g_2, -g_3)};$$

$$(6)\qquad \int_{u_0}^{u_1} \zeta u\, du = \log\sigma u'_1 - \log\sigma u'_0 + (2r\eta_1 + 2s\eta_3)(u'_1 - u'_0)$$
$$[u_0 = u'_0 + 2r\omega_1 + 2s\omega_3,\ u_1 = u'_1 + 2r\omega_1 + 2s\omega_3];$$

$$(7)\qquad \int_{u_0}^{u_1} \zeta u\, du = \frac{\eta_1}{2\omega_1}(u_1^2 - u_0^2) + \int_{v_0}^{v_1} \frac{\mathfrak{I}'_1(v)}{\mathfrak{I}_1(v)}\, dv; \quad u = 2\omega_1 v.$$

CXVIII.

Cas normal où $\frac{\tau}{i}$ est réel et positif.

(1).

Si le chemin d'intégration ne sort pas du rectangle dont les sommets sont $\frac{\pm 1 \pm \tau}{2}$, on a, en désignant par N_1 le nombre de fois que le chemin d'intégration traverse de haut en bas, par N_2 le nombre de fois qu'il traverse de bas en haut le segment de droite allant de 0 à $-\frac{1}{2}$, et en prenant pour $\log \mathfrak{I}_1(v)$ sa détermination principale,

$$\int_{v_0}^{v_1} \frac{\mathfrak{I}'_1(v)}{\mathfrak{I}_1(v)}\,dv = \log \mathfrak{I}_1(v_1) - \log \mathfrak{I}_1(v_0) + 2(N_1 - N_2)\pi i.$$

(2).

Si v_0 est un point du segment de droite allant de $\frac{-1-\tau}{2}$ à $\frac{-1+\tau}{2}$, le point $-\frac{1}{2}$ excepté, et si l'on prend le signe supérieur ou inférieur suivant que la partie réelle de $\frac{v_0}{i}$ est positive ou négative, on a

$$\int_{v_0}^{v_0+1} \frac{\mathfrak{I}'_1(v)}{\mathfrak{I}_1(v)}\,dv = \mp \pi i.$$

(3).

Si $v_0 = \alpha + \beta\tau$, où α, β sont réels, β non entier, et si le nombre entier n est déterminé par les conditions $n < \beta < n + 1$, on a (CXVII$_1$)

$$\int_{v_0}^{v_0+1} \frac{\mathfrak{I}'_1(v)}{\mathfrak{I}_1(v)}\,dv = -(2n+1)\pi i.$$

(4).

Si v_0 est un point du segment de droite allant de $\frac{-1-\tau}{2}$ à $\frac{1-\tau}{2}$, le point $-\frac{\tau}{2}$ excepté, si l'on désigne par α la partie réelle de v_0, et si l'on prend le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que α est positif ou négatif, on a

$$\int_{v_0}^{v_0+\tau} \frac{\mathfrak{I}'_1(v)}{\mathfrak{I}_1(v)}\,dv = i\pi(-2\alpha \pm 1).$$

CXVIII (SUITE).

(5).

Si m, n désignent des nombres entiers et α, β des nombres vérifiant les conditions

$$\alpha \text{ différent de zéro}, \quad -\frac{1}{2} < \alpha \leqq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leqq \beta < \frac{1}{2},$$

et si $v_0 = m + n\tau + \alpha + \beta\tau$, on a, en prenant le signe supérieur ou inférieur suivant que α est positif ou négatif,

$$\int_{v_0}^{v_0+\tau} \frac{\Im_1'(v)}{\Im_1(v)}\, dv = -2i\pi\left(v_0 - m + \frac{\tau}{2} \mp \frac{1}{2}\right).$$

(6).

Si, en outre, r est un entier positif, on a

$$\int_{v_0}^{v_0+r\tau} \frac{\Im_1'(v)}{\Im_1(v)}\, dv = -2ri\pi\left(v_0 - m + \frac{r\tau}{2} \mp \frac{1}{2}\right).$$

(7).

Si m, n désignent des nombres entiers et α', β' des nombres vérifiant les conditions

$$\alpha' \text{ différent de zéro}, \quad -\frac{1}{2} < \alpha' \leqq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < \beta' \leqq \frac{1}{2};$$

si enfin $\alpha = m + \alpha'$, $\beta = n + \beta'$, et si l'on prend le signe supérieur ou inférieur suivant que α' est positif ou négatif, on a, en prenant pour le logarithme sa détermination principale,

$$\int_{\alpha-\beta\tau}^{\alpha+\beta\tau} \frac{\Im_1'(v)}{\Im_1(v)}\, dv = \log \frac{\Im_1(\alpha' + \beta'\tau)}{\Im_1(\alpha' - \beta'\tau)} - 2ni\pi(2\alpha' \mp 1).$$

INVERSION.

On donne trois nombres distincts $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=0$; quand les points $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont en ligne droite, ε_2 désignera toujours le point intermédiaire; $\varkappa, \gamma_2, \gamma_3$ seront les nombres

$$\varkappa=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{\varepsilon_1-\varepsilon_3},\quad \gamma_2=2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2),\quad \gamma_3=4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3;$$

$\varkappa$ n'est ni un nombre réel négatif, ni un nombre réel plus grand que 1. Dans ce qui suit, $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{1-\varkappa}$, $\sqrt{1-\varkappa\sin^2\varphi}$ désignent les déterminations des radicaux dont la partie réelle est positive; $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{1-\varkappa}$ les déterminations des radicaux dont l'argument est compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$; $\log\varkappa$ un nombre dont la partie réelle est le logarithme népérien de $|\varkappa|$ et dans lequel le coefficient de i est l'argument de $\varkappa$ supposé compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

CXIX.

(1).

$$\mathrm{X}(\varkappa)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa\sin^2\varphi}},$$

$$\mathrm{X}'(\varkappa)=\mathrm{X}(1-\varkappa),\qquad \tau=\frac{i\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)};$$

la partie réelle de $\frac{\tau}{i}$ est toujours positive.

On entendra par $\sqrt{\mathrm{X}}$, $\sqrt{\mathrm{X}'}$ les déterminations de ces radicaux dont la partie réelle est positive.

(2).

Si a, d sont des entiers impairs, b, c des entiers pairs tels que $ad-bc=1$, on a

$$k^2\left[\frac{c\mathrm{X}(\varkappa)+id\mathrm{X}'(\varkappa)}{a\mathrm{X}(\varkappa)+ib\mathrm{X}'(\varkappa)}\right]=\varkappa.$$

(3).

Si a, b, c, d ont la même signification et si ayant fixé arbitrairement une des déterminations de $\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$, on pose

$$\omega_1=\frac{a\mathrm{X}(\varkappa)+ib\mathrm{X}'(\varkappa)}{\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}},\qquad \omega_3=\frac{c\mathrm{X}(\varkappa)+id\mathrm{X}'(\varkappa)}{\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}},$$

on a

$$g_2(\omega_1,\omega_3)=\gamma_2,\qquad g_3(\omega_1,\omega_3)=\gamma_3,$$
$$e_\alpha=\mathrm{p}(\omega_\alpha\mid\omega_1,\omega_3)=\varepsilon_\alpha,\qquad (\alpha=1,2,3).$$

CXIX (suite).

(4).

$$\sqrt{k\left[\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right]} = \frac{\mathfrak{S}_2\left[0\left|\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right.\right]}{\mathfrak{S}_3\left[0\left|\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right.\right]} = \sqrt[4]{\varkappa}, \quad \sqrt{k'\left[\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right]} = \frac{\mathfrak{S}_4\left[0\left|\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right.\right]}{\mathfrak{S}_3\left[0\left|\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right.\right]} = \sqrt[4]{1-\varkappa}.$$

(5).

$$\beta = \frac{1-\sqrt[4]{1-\varkappa}}{1+\sqrt[4]{1-\varkappa}} = \sqrt{k\left[\frac{4\,i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right]} = \frac{\mathfrak{S}_3\left[0\left|\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right.\right] - \mathfrak{S}_4\left[0\left|\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right.\right]}{\mathfrak{S}_3\left[0\left|\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right.\right] + \mathfrak{S}_4\left[0\left|\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right.\right]}$$

$$= \frac{2e^{-\frac{\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\pi} + 2e^{-\frac{9\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\pi} + 2e^{-\frac{25\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\pi} + \ldots}{1 - 2e^{-\frac{4\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\pi} + 2e^{-\frac{16\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\pi} + \ldots};$$

on a toujours $|\beta| < 1$.

(6).

$$\mathrm{K}\left[\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right] = \frac{\pi}{2}\,\mathfrak{S}_3^2\left[0\left|\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right.\right] = \mathrm{X}(\varkappa), \qquad \mathrm{K}'\left[\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right] = \mathrm{X}'(\varkappa).$$

(7).

$$\left|\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right| \mathfrak{S}_1'\left[0\left|\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right.\right] = 2\sqrt[4]{\varkappa}\sqrt[4]{1-\varkappa}\left[\sqrt{\mathrm{X}(\varkappa)}\right]^3, \qquad \left|\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right| \mathfrak{S}_2\left[0\left|\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right.\right] = \sqrt[4]{\varkappa}\sqrt{\mathrm{X}(\varkappa)},$$

$$\left|\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right| \mathfrak{S}_3\left[0\left|\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right.\right] = \sqrt{\mathrm{X}(\varkappa)}, \qquad \left|\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right| \mathfrak{S}_4\left[0\left|\frac{i\,\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)}\right.\right] = \sqrt[4]{1-\varkappa}\sqrt{\mathrm{X}(\varkappa)}.$$

(8).

$$\mathrm{X}(\beta^4) = \mathrm{X}\left[\left(\frac{1-\sqrt[4]{1-\varkappa}}{1+\sqrt[4]{1-\varkappa}}\right)^4\right] = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt[4]{1-\varkappa}\right)^2 \mathrm{X}(\varkappa).$$

(9).

$$\omega_1 = \frac{\mathrm{X}(\varkappa)}{\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}}, \quad \omega_3 = \frac{\mathrm{X}'(\varkappa)\,i}{\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}}, \quad \sqrt{\omega_1} = \frac{\sqrt{\mathrm{X}(\varkappa)}}{\sqrt[4]{\varepsilon_1-\varepsilon_3}};$$

$$\sqrt{e_1-e_3} = \sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}, \quad \sqrt{e_1-e_2} = \sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\sqrt{1-\varkappa}, \quad \sqrt{e_2-e_3} = -\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\sqrt{\varkappa};$$

$$\sqrt[4]{e_1-e_3} = \sqrt[4]{\varepsilon_1-\varepsilon_3}, \quad \sqrt[4]{e_1-e_2} = \sqrt[4]{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\sqrt[4]{1-\varkappa}, \quad \sqrt[4]{e_2-e_3} = i\sqrt[4]{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\sqrt[4]{\varkappa};$$

$$e_1 = \varepsilon_1, \; e_2 = \varepsilon_2, \; e_3 = \varepsilon_3.$$

Dans les Tableaux suivants on suppose $\omega_1, \omega_3, \sqrt{\omega_1}$ déterminés par les formules (9); $\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$ est fixée arbitrairement à moins qu'on ne prévienne du contraire; de même $\sqrt[4]{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$ est une racine carrée, fixée arbitrairement, de $\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$.

CXX.

Dans les formules (1), (2), (3) on suppose $|x| < 1$; cette supposition n'intervient pas dans les formules (4).

(1).

En posant

$$a_n = \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2, \qquad b_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu}\right),$$

$$\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n x^n, \qquad \mu(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n b_n x^n,$$

et en désignant par A, B deux constantes arbitraires, la solution générale de l'équation

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x-1)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{4}y = 0$$

est

$$y = A\,\lambda(x) + B[4\,\mu(x) + \lambda(x)\log x].$$

(2).

$$\text{x}(x) = \frac{\pi}{2}\lambda(x), \qquad \text{x}'(x) = -\frac{1}{2}\left[4\,\mu(x) + \lambda(x)\log\frac{x}{16}\right],$$

où le logarithme a sa détermination principale.

(3).

$$\lambda(x) = 1 - \frac{1}{\pi}\log(1-x) - \varepsilon(x), \qquad |\varepsilon(x)| < \frac{1}{5}|x|;$$

$$\mu(x) = -\frac{1}{\pi}\log 2\log(1-x) - \eta(x), \qquad |\eta(x)| < \frac{1}{3}|x|.$$

(4).

$$\text{x}(1-x) = \text{x}'(x), \qquad \text{x}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \text{x}'\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sqrt{1-x}\,\text{x}(x),$$

$$\text{x}'(1-x) = \text{x}(x), \qquad \text{x}'\left(\frac{x}{x-1}\right) = \text{x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sqrt{1-x}\,[\text{x}'(x) \pm i\,\text{x}(x)],$$

$$\text{x}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \text{x}'\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\,\text{x}'(x),$$

$$\text{x}'\left(\frac{x-1}{x}\right) = \text{x}\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\,[\text{x}(x) \mp i\,\text{x}'(x)],$$

où il faut prendre les signes supérieurs ou inférieurs suivant que la partie réelle de $\frac{x}{i}$ est positive ou négative. Pour deux valeurs conjuguées de x, les valeurs de $\text{x}(x)$ sont conjuguées, les valeurs correspondantes de τ sont représentées par deux points symétriques par rapport à l'axe des quantités imaginaires.

CXXI.

(1).

Si r est un nombre positif et si $|\varkappa| < 1$, on a, en posant $q = e^{-\frac{\text{x}'(\varkappa)}{\text{x}(\varkappa)}\pi}$,

$$q^r = e^{r\left[\log\frac{\varkappa}{16} + 4\frac{\mu(\varkappa)}{\lambda(\varkappa)}\right]} = \frac{\varkappa^r}{16^r}\, e^{4r\frac{\mu(\varkappa)}{\lambda(\varkappa)}}.$$

(2).

$$q = \frac{1}{16}\varkappa + \frac{1}{32}\varkappa^2 + \frac{21}{1024}\varkappa^3 + \frac{31}{2048}\varkappa^4 + \ldots = \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \varkappa^n; \qquad |\varkappa| < 1.$$

$$\begin{aligned}
2^{19}.c_5 &= 6257\,, & 2^{36}.c_9 &= 435\,506\,703\,,\\
2^{20}.c_6 &= 10293\,, & 2^{37}.c_{10} &= 776\,957\,575\,,\\
2^{25}.c_7 &= 279025, & 2^{42}.c_{11} &= 224\,170\,455\,55,\\
2^{26}.c_8 &= 483\,127, & 2^{43}.c_{12} &= 407\,846\,719\,53;
\end{aligned}$$

Cf. T. III, p. 221, note.

(3).

$$q^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\varkappa} + 2\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{\varkappa}\right)^5 + 15\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{\varkappa}\right)^9 + 150\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{\varkappa}\right)^{13} + \ldots; \qquad |\varkappa| < 1.$$

(4).

$$q = \frac{1}{2}\beta + 2\left(\frac{1}{2}\beta\right)^5 + 15\left(\frac{1}{2}\beta\right)^9 + 150\left(\frac{1}{2}\beta\right)^{13} + \ldots, \qquad \beta = \frac{1 - \sqrt[4]{1-\varkappa}}{1 + \sqrt[4]{1-\varkappa}}.$$

(5).

$$\text{x}\left(\frac{1}{2}\right) = \text{x}'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,\mathfrak{S}_3^2(0\,|\,i) = 1{,}854\,075; \quad q = e^{-\pi} = 0{,}0432139;$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{x}\left(e^{\pm\frac{i\pi}{3}}\right) &= 1{,}54369 \pm i.0{,}41363\\
\text{x}'\left(e^{\pm\frac{i\pi}{3}}\right) &= 1{,}54369 \mp i.0{,}41363
\end{aligned}\right\} \qquad q = \pm i e^{-\frac{\pi|\sqrt{3}|}{2}} = \pm i.0{,}065829.$$

CXXII.

Dans toutes les formules de ce Tableau on prendra les signes supérieurs ou inférieurs suivant que la partie réelle de $\frac{x}{i}$ est positive ou négative.

L'argument de $\sqrt[4]{1-x_0}$ est compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$.

Dans les formules (4), $\log q$ a sa détermination principale.

(1).

	NUMÉROS D'ORDRE DE LA RÉGION.					
	I. $\lvert x\rvert<1$, $\lvert x-1\rvert<1$, $\lvert x\rvert<\lvert x-1\rvert$.	II. $\lvert x\rvert<1$, $\lvert x-1\rvert>1$, $\lvert x\rvert<\lvert x-1\rvert$.	III. $\lvert x\rvert>1$, $\lvert x-1\rvert>1$, $\lvert x\rvert>\lvert x-1\rvert$.	IV. $\lvert x\rvert>1$, $\lvert x-1\rvert>1$, $\lvert x\rvert<\lvert x-1\rvert$.	V. $\lvert x\rvert<1$, $\lvert x-1\rvert<1$, $\lvert x\rvert>\lvert x-1\rvert$.	VI. $\lvert x\rvert>1$, $\lvert x-1\rvert<1$, $\lvert x\rvert>\lvert x-1\rvert$.
Valeur de x_0.	x	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$

(2) $$\beta_0=\frac{1-\sqrt[4]{1-x_0}}{1+\sqrt[4]{1-x_0}},\qquad |\beta_0|<\frac{2}{15};$$

(3) $$q=\frac{1}{2}\beta_0+2\left(\frac{1}{2}\beta_0\right)^5+15\left(\frac{1}{2}\beta_0\right)^9+150\left(\frac{1}{2}\beta_0\right)^{13}+\ldots,\qquad |q|<\frac{1}{15};$$

(4) $$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{X}(x_0)=\frac{\pi}{2}\,\vartheta_3^2(0\mid q)=\frac{\pi}{2}(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)^2,\\ &\mathrm{X}'(x_0)=-\frac{\mathrm{X}(x_0)\log q}{\pi},\qquad \mathrm{T}=\frac{i\,\mathrm{X}'(x_0)}{\mathrm{X}(x_0)};\end{aligned}\right.$$

	NUMÉROS D'ORDRE DE LA RÉGION.					
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Valeur de T.....	τ	$\mp 1+\tau$	$\frac{\tau}{1\mp\tau}$	$\frac{-1}{\mp 1+\tau}$	$-\frac{1}{\tau}$	$\frac{-1\pm\tau}{\tau}$
Valeur de τ.....	T	$\mathrm{T}\pm 1$	$\frac{\mathrm{T}}{1\pm\mathrm{T}}$	$\frac{\pm\mathrm{T}-1}{\mathrm{T}}$	$-\frac{1}{\mathrm{T}}$	$\frac{1}{\pm 1-\mathrm{T}}$

CXXII (suite).

(5).

	Numéros d'ordre de la région.		
	I.	II.	III.
Valeur de $\sqrt{E_1 - E_3}$	$\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$	$\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\sqrt{1-\varkappa}$	$\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\sqrt{\varkappa}$
Valeur de $\sqrt{E_2 - E_3}$	$-\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\sqrt{\varkappa}$	$\pm i\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\sqrt{\varkappa}$	$-\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$
Valeur de $\sqrt{E_1 - E_2}$	$\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\sqrt{1-\varkappa}$	$\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$	$\pm i\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\sqrt{1-\varkappa}$
Valeurs de E_1, E_2, E_3	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	$\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2$	$\varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_3$

	Numéros d'ordre de la région.		
	IV.	V.	VI.
Valeur de $\sqrt{E_1 - E_3}$	$i\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\sqrt{1-\varkappa}$	$i\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$	$i\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\sqrt{\varkappa}$
Valeur de $\sqrt{E_2 - E_3}$	$-i\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$	$-i\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\sqrt{1-\varkappa}$	$\pm\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\sqrt{1-\varkappa}$
Valeur de $\sqrt{E_1 - E_2}$	$\pm\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\sqrt{\varkappa}$	$i\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\sqrt{\varkappa}$	$i\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$
Valeurs de E_1, E_2, E_3	$\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1$	$\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$	$\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$(6) \qquad \Omega_1 = \frac{\mathrm{X}(\varkappa_0)}{\sqrt{E_1 - E_3}}, \qquad \Omega_3 = \frac{i\mathrm{X}'(\varkappa_0)}{\sqrt{E_1 - E_3}};$$

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} H_1 &= -\frac{1}{12\,\Omega_1}\frac{\mathfrak{I}_1'''(0\,|\,\mathrm{T})}{\mathfrak{I}_1'(0\,|\,\mathrm{T})} = \frac{\pi^2}{12\,\Omega_1}\left(1 - 24\sum_{r=1}^{r=\infty} r\,\frac{Q^{2r}}{1-Q^{2r}}\right), \\ H_3 &= H_1\mathrm{T} - \frac{\pi i}{2\,\Omega_1}; \end{aligned} \right.$$

CXXII (SUITE).

$$(8)\quad \begin{cases} \sqrt[4]{E_2 - E_3} = i\sqrt{\dfrac{\pi}{2\Omega_1}}\,\vartheta_2(0\mid T), \qquad \sqrt[4]{E_1 - E_2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\Omega_1}}\,\vartheta_4(0\mid T), \\ \sqrt[4]{E_1 - E_3} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\Omega_1}}\,\vartheta_3(0\mid T). \end{cases}$$

(9).

La partie réelle des radicaux qui figurent dans les formules suivantes est *positive;* $\sqrt{T-1} = i\sqrt{1-T}$.

Si $\varkappa$ est dans la région II, on a $q = -Q$, $\omega_1 = \Omega_1$, $\omega_3 = \pm\Omega_1 + \Omega_3$; $\eta_1 = H_1$, $\eta_3 = \pm H_1 + H_3$;

$$\vartheta_1(v\mid\tau) = e^{\pm\frac{\pi i}{4}}\,\vartheta_1(v\mid T), \qquad \vartheta_2(v\mid\tau) = e^{\pm\frac{\pi i}{4}}\,\vartheta_2(v\mid T),$$

$$\vartheta_3(v\mid\tau) = \vartheta_4(v\mid T), \qquad \vartheta_4(v\mid\tau) = \vartheta_3(v\mid T).$$

On peut d'ailleurs employer les mêmes formules que dans le cas où $\varkappa$ est dans la région I.

Si $\varkappa$ est dans la région III, on a $q = e^{\frac{T}{1\pm T}\pi i}$, $\omega_1 = \Omega_1 \pm \Omega_3$, $\omega_3 = \Omega_3$; $\eta_1 = H_1 \pm H_3$, $\eta_3 = H_3$;

$$\vartheta_1\left(\frac{v}{1\pm T}\,\middle|\,\tau\right) = e^{\mp\frac{\pi i}{4}}\sqrt{1\pm T}\,e^{\pm\frac{v^2\pi i}{1\pm T}}\,\vartheta_1(v\mid T),$$

$$\vartheta_2\left(\frac{v}{1\pm T}\,\middle|\,\tau\right) = \sqrt{1\pm T}\,e^{\pm\frac{v^2\pi i}{1\pm T}}\,\vartheta_3(v\mid T),$$

$$\vartheta_3\left(\frac{v}{1\pm T}\,\middle|\,\tau\right) = \sqrt{1\pm T}\,e^{\pm\frac{v^2\pi i}{1\pm T}}\,\vartheta_2(v\mid T),$$

$$\vartheta_4\left(\frac{v}{1\pm T}\,\middle|\,\tau\right) = e^{\mp\frac{\pi i}{4}}\sqrt{1\pm T}\,e^{\pm\frac{v^2\pi i}{1\pm T}}\,\vartheta_4(v\mid T).$$

Si $\varkappa$ est dans la région IV, on a $q = e^{\frac{-1\pm T}{T}\pi i}$, $\omega_1 = \Omega_3$, $\omega_3 = -\Omega_1 \pm \Omega_3$; $\eta_1 = H_3$, $\eta_3 = -H_1 \pm H_3$;

$$\vartheta_1\left(\frac{v}{T}\,\middle|\,\tau\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}(3\mp 1)}\sqrt{T}\,e^{\frac{v^2}{T}\pi i}\,\vartheta_1(v\mid T),$$

$$\vartheta_2\left(\frac{v}{T}\,\middle|\,\tau\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}(1\mp 1)}\sqrt{T}\,e^{\frac{v^2}{T}\pi i}\,\vartheta_4(v\mid T),$$

CXXII (SUITE).

(9) [*suite*].

$$\mathfrak{I}_3\left(\frac{v}{\mathrm{T}}\,\middle|\,\tau\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\mathrm{T}}\,e^{\frac{v^2}{\mathrm{T}}\pi i}\,\mathfrak{I}_2(v\mid\mathrm{T}),$$

$$\mathfrak{I}_4\left(\frac{v}{\mathrm{T}}\,\middle|\,\tau\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\mathrm{T}}\,e^{\frac{v^2}{\mathrm{T}}\pi i}\,\mathfrak{I}_3(v\mid\mathrm{T}).$$

Si x est dans la région V, on a $q = e^{-\frac{\pi i}{\mathrm{T}}}$, $\omega_1 = \Omega_3$, $\omega_3 = -\Omega_1$; $\eta_1 = \mathrm{H}_3$, $\eta_3 = -\mathrm{H}_1$;

$$\mathfrak{I}_1\left(\frac{v}{\mathrm{T}}\,\middle|\,\tau\right) = e^{-\frac{3\pi i}{4}}\sqrt{\mathrm{T}}\,e^{\frac{v^2\pi i}{\mathrm{T}}}\,\mathfrak{I}_1(v\mid\mathrm{T}),$$

$$\mathfrak{I}_2\left(\frac{v}{\mathrm{T}}\,\middle|\,\tau\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\mathrm{T}}\,e^{\frac{v^2\pi i}{\mathrm{T}}}\,\mathfrak{I}_4(v\mid\mathrm{T}),$$

$$\mathfrak{I}_3\left(\frac{v}{\mathrm{T}}\,\middle|\,\tau\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\mathrm{T}}\,e^{\frac{v^2\pi i}{\mathrm{T}}}\,\mathfrak{I}_3(v\mid\mathrm{T}),$$

$$\mathfrak{I}_4\left(\frac{v}{\mathrm{T}}\,\middle|\,\tau\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\mathrm{T}}\,e^{\frac{v^2\pi i}{\mathrm{T}}}\,\mathfrak{I}_2(v\mid\mathrm{T}).$$

Si x est dans la région VI, on a $q = e^{\frac{\pi i}{\pm 1 - \mathrm{T}}}$, $\omega_1 = \mp\Omega_1 + \Omega_3$, $\omega_3 = -\Omega_1$; $\eta_1 = \mp\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_3$, $\eta_3 = -\mathrm{H}_1$;

$$\mathfrak{I}_1\left(\frac{v}{\mathrm{T}\mp 1}\,\middle|\,\tau\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}(3\pm 1)}\sqrt{\mp 1 + \mathrm{T}}\,\mathfrak{I}_1(v\mid\mathrm{T}),$$

$$\mathfrak{I}_2\left(\frac{v}{\mathrm{T}\mp 1}\,\middle|\,\tau\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\mp 1 + \mathrm{T}}\,\mathfrak{I}_3(v\mid\mathrm{T}),$$

$$\mathfrak{I}_3\left(\frac{v}{\mathrm{T}\mp 1}\,\middle|\,\tau\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\mp 1 + \mathrm{T}}\,\mathfrak{I}_4(v\mid\mathrm{T}),$$

$$\mathfrak{I}_4\left(\frac{v}{\mathrm{T}\mp 1}\,\middle|\,\tau\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}(1\pm 1)}\sqrt{\mp 1 + \mathrm{T}}\,\mathfrak{I}_2(v\mid\mathrm{T}).$$

On peut aussi, quand x est dans la région VI, appliquer les formules concernant le cas où x est dans la région V.

CXXII (SUITE).

(10).

Dans le cas où $\varkappa$ est très petit on peut faire usage des relations suivantes, obtenues en négligeant $\varkappa^3$, et dans lesquelles, si l'on se donne seulement $\varkappa$, on prendra pour $\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$ la valeur que l'on veut, par exemple le nombre 1. Les logarithmes qui figurent dans ces formules sont les déterminations principales.

$$\omega_1\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}=\mathrm{X}=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\varkappa}{4}+\frac{9\varkappa^2}{64}\right);$$

$$-i\omega_3\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}=\mathrm{X}'=-\frac{\varkappa}{4}\left(1+\frac{21}{32}\varkappa\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varkappa}{4}+\frac{9\varkappa^2}{64}\right)\log\frac{16}{\varkappa};$$

$$\eta_1=\frac{\pi}{6}\left(1-\frac{\varkappa}{4}-\frac{11\varkappa^2}{64}\right)\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3};$$

$$\eta_3=i\left[-1+\frac{\varkappa}{6}+\frac{25\varkappa^2}{384}+\frac{1}{6}\left(1-\frac{\varkappa}{4}-\frac{11\varkappa^2}{64}\right)\log\frac{16}{\varkappa}\right]\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3};$$

$$\mathrm{E}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\varkappa}{4}+\frac{3\varkappa^2}{64}\right);\qquad \mathrm{E}'=1-\frac{\varkappa}{4}-\frac{13\varkappa^2}{64}+\frac{\varkappa}{4}\left(1+\frac{3\varkappa}{8}\right)\log\frac{16}{\varkappa};$$

$$q=\frac{\varkappa}{16}+\frac{\varkappa^2}{32};\qquad \tau\pi i=\log q=\log\frac{\varkappa}{16}+\frac{\varkappa}{2}+\frac{13\varkappa^2}{64}.$$

En négligeant $\varkappa^2$ on a de même

$$\mathfrak{I}_1(v\mid\tau)=\varkappa^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{\varkappa}{8}\right)\sin\pi v;\qquad \mathfrak{I}_3(v\mid\tau)=1+\frac{\varkappa}{8}\cos 2\pi v;$$

$$\mathfrak{I}_2(v\mid\tau)=\varkappa^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{\varkappa}{8}\right)\cos\pi v;\qquad \mathfrak{I}_4(v\mid\tau)=1-\frac{\varkappa}{8}\cos 2\pi v;$$

$$\pi v=\left(1-\frac{\varkappa}{4}\right)u\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3};$$

$$\sigma(u\mid\omega_1,\omega_3)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}}\left(1+\frac{\varkappa}{4}\right)\sin(\pi v)e^{\frac{1}{6}\pi^2v^2};\qquad \sigma_2(u\mid\omega_1,\omega_3)=\left(1-\frac{\varkappa}{4}\sin^2\pi v\right)e^{\frac{1}{6}\pi^2v^2};$$

$$\sigma_1(u\mid\omega_1,\omega_3)=\cos(\pi v)\,e^{\frac{1}{6}\pi^2v^2};\qquad \sigma_3(u\mid\omega_1,\omega_3)=\left(1+\frac{\varkappa}{4}\sin^2\pi v\right)e^{\frac{1}{6}\pi^2v^2};$$

$$\zeta(u\mid\omega_1,\omega_3)=\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\left(1-\frac{\varkappa}{4}\right)\left(\frac{\pi v}{3}+\cot\pi v\right);$$

$$p(u\mid\omega_1,\omega_3)=-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_3}{3}\left(1-\frac{\varkappa}{2}\right)\left(1-\frac{3}{\sin^2\pi v}\right);$$

$$\frac{\operatorname{sn}(u,\varkappa)}{\sin\left(1-\frac{\varkappa}{4}\right)u}=1+\frac{\varkappa}{4}\cos^2\left(1-\frac{\varkappa}{4}\right)u;\qquad \frac{\operatorname{cn}(u,\varkappa)}{\cos\left(1-\frac{\varkappa}{4}\right)u}=1-\frac{\varkappa}{4}\sin^2\left(1-\frac{\varkappa}{4}\right)u;$$

$$\operatorname{dn}(u,\varkappa)=1-\frac{\varkappa}{2}\sin^2\left(1-\frac{\varkappa}{4}\right)u.$$

CXXII (SUITE).

(II).

Dans le cas où $\varkappa = 1 - \varkappa_0$ est très voisin de 1, on fait de même souvent usage des relations suivantes :

$$\varkappa_0 = 1 - \varkappa;$$

$$\omega_1\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3} = \mathrm{X} = -\frac{\varkappa_0}{4}\left(1+\frac{21\varkappa_0}{32}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varkappa_0}{4}+\frac{9\varkappa_0^2}{64}\right)\log\frac{16}{\varkappa_0};$$

$$-i\omega_3\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3} = \mathrm{X}' = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\varkappa_0}{4}+\frac{9\varkappa_0^2}{64}\right);$$

$$\eta_1 = \left[1-\frac{\varkappa_0}{6}-\frac{25\varkappa_0^2}{384}-\left(\frac{1}{6}-\frac{\varkappa_0}{24}-\frac{11\varkappa_0^2}{384}\right)\log\frac{16}{\varkappa_0}\right]\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3};$$

$$\eta_3 = -\frac{i\pi}{6}\left(1-\frac{\varkappa_0}{4}-\frac{11\varkappa_0^2}{64}\right)\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3};$$

$$\mathrm{E} = 1-\frac{\varkappa_0}{4}-\frac{13\varkappa_0^2}{64}+\frac{\varkappa_0}{4}\left(1+\frac{3\varkappa_0}{8}\right)\log\frac{16}{\varkappa_0}; \qquad \mathrm{E}' = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\varkappa_0}{4}-\frac{3\varkappa_0^2}{64}\right);$$

$$-\frac{\pi i}{\tau} = \log\frac{\varkappa_0}{16}+\frac{\varkappa_0}{2}+\frac{13\varkappa_0^2}{64};$$

$$\pi w = \left(1-\frac{\varkappa_0}{4}\right)u\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3};$$

$$\sigma(u\,|\,\omega_1,\omega_3) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}}\left(1+\frac{\varkappa_0}{4}\right)\mathrm{sh}(\pi w)\,e^{-\frac{\pi^2 w^2}{6}}; \quad \sigma_2(u\,|\,\omega_1,\omega_3) = \left[1+\frac{\varkappa_0}{4}\mathrm{sh}^2(\pi w)\right]e^{-\frac{\pi^2 w^2}{6}};$$

$$\sigma_1(u\,|\,\omega_1,\omega_3) = \left[1-\frac{\varkappa_0}{4}\mathrm{sh}^2(\pi w)\right]e^{-\frac{\pi^2 w^2}{6}}; \qquad \sigma_3(u\,|\,\omega_1,\omega_3) = \mathrm{ch}(\pi w)\,e^{-\frac{\pi^2 w^2}{6}};$$

$$\zeta(u\,|\,\omega_1,\omega_3) = \sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\left(1-\frac{\varkappa_0}{4}\right)\left[-\frac{\pi w}{3}+\frac{\mathrm{ch}(\pi w)}{\mathrm{sh}(\pi w)}\right];$$

$$p(u\,|\,\omega_1,\omega_3) = (\varepsilon_1-\varepsilon_3)\left(1-\frac{\varkappa_0}{2}\right)\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2(\pi w)}\right].$$

$$\mathrm{sn}(u,\varkappa) = \left(1+\frac{\varkappa_0}{4}\right)\frac{\mathrm{sh}\left(1-\frac{\varkappa_0}{4}\right)u}{\mathrm{ch}\left(1-\frac{\varkappa_0}{4}\right)u}; \qquad \mathrm{cn}(u,\varkappa) = \frac{1-\frac{\varkappa_0}{4}\mathrm{sh}^2\left(1-\frac{\varkappa_0}{4}\right)u}{\mathrm{ch}\left(1-\frac{\varkappa_0}{4}\right)u};$$

$$\mathrm{dn}(u,\varkappa) = \frac{1+\frac{\varkappa_0}{4}\mathrm{sh}^2\left(1-\frac{\varkappa_0}{4}\right)u}{\mathrm{ch}\left(1-\frac{\varkappa_0}{4}\right)u}.$$

CXXIII.

Cas où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ *sont réels;* $\varepsilon_1 > 0 \geqq \varepsilon_2 > \varepsilon_3$; $\gamma_2 > 0$; $\gamma_3 \geqq 0$; $\mathcal{G} > 0$.

Si $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont donnés, on prendra

$$\varkappa = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Si l'on se donne seulement $\varkappa \leqq \frac{1}{2}$, on fixera arbitrairement le nombre positif $|\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}|$ et l'on prendra

$$\varepsilon_1 = \frac{2-\varkappa}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \qquad \varepsilon_2 = \frac{2\varkappa - 1}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \qquad \varepsilon_3 = \frac{-\varkappa - 1}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3).$$

(1).

$$\beta = \frac{1 - |\sqrt[4]{1-\varkappa}|}{1 + |\sqrt[4]{1-\varkappa}|},$$

$$q = \frac{1}{2}\beta + 2\left(\frac{1}{2}\beta\right)^5 + 15\left(\frac{1}{2}\beta\right)^9 + 150\left(\frac{1}{2}\beta\right)^{13} + \ldots, \qquad q^{\frac{1}{4}} = |\sqrt[4]{q}|,$$

$$X = \frac{\pi}{2}(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots)^2, \qquad X' = -\frac{1}{\pi} X \log q.$$

$$\omega_1 = \frac{X}{|\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}|}, \qquad \omega_3 = \frac{iX'}{|\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}|}, \qquad \tau = \frac{iX'}{X} = \frac{\omega_3}{\omega_1},$$

$$\sqrt{X} = |\sqrt{X}|, \qquad \sqrt{\omega_1} = |\sqrt{\omega_1}|,$$

$$\eta_1 = \frac{\pi^2}{12\omega_1} - \frac{2\pi^2}{\omega_1}\left(\frac{q^2}{1-q^2} + 2\,\frac{q^4}{1-q^4} + 3\,\frac{q^6}{1-q^6} + 4\,\frac{q^8}{1-q^8} + \ldots\right).$$

$$\eta_1 = -\frac{1}{12\omega_1}\frac{\mathfrak{I}_1'''(0\,|\,\tau)}{\mathfrak{I}_1'(0\,|\,\tau)}, \qquad \eta_3 = \eta_1\tau - \frac{\pi i}{2\omega_1}.$$

$$\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = |\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}|; \quad \sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = |\sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}|; \quad \sqrt{\varkappa} = |\sqrt{\varkappa}|; \quad \sqrt[4]{\varkappa} = |\sqrt[4]{\varkappa}|;$$

$$\sqrt{1-\varkappa} = |\sqrt{1-\varkappa}|; \qquad \sqrt[4]{1-\varkappa} = |\sqrt[4]{1-\varkappa}|;$$

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \sqrt{1-\varkappa}\,\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}; \quad \sqrt{e_2 - e_3} = -\sqrt{\varkappa}\,\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}; \quad \sqrt{e_1 - e_3} = \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3};$$

$$\sqrt[4]{e_1 - e_2} = \sqrt[4]{1-\varkappa}\,\sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}; \quad \sqrt[4]{e_2 - e_3} = i\,\sqrt[4]{\varkappa}\,\sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}; \quad \sqrt[4]{e_1 - e_3} = \sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}.$$

CXXIII (suite).

(2).

$$\mathfrak{I}_1(v\,|\,\tau) = 2q^{\frac{1}{4}}(\sin v\pi - q^2 \sin 3v\pi + q^6 \sin 5v\pi - q^{12} \sin 7v\pi + \ldots),$$

$$\mathfrak{I}_2(v\,|\,\tau) = 2q^{\frac{1}{4}}(\cos v\pi + q^2 \cos 3v\pi + q^6 \cos 5v\pi + q^{12} \cos 7v\pi + \ldots),$$

$$\mathfrak{I}_3(v\,|\,\tau) = 1 + 2q \cos 2v\pi + 2q^4 \cos 4v\pi + 2q^9 \cos 6v\pi + \ldots,$$

$$\mathfrak{I}_4(v\,|\,\tau) = 1 - 2q \cos 2v\pi + 2q^4 \cos 4v\pi - 2q^9 \cos 6v\pi + \ldots,$$

$$\mathfrak{I}'_1(v\,|\,\tau) = 2\pi q^{\frac{1}{4}}(\cos v\pi - 3q^2 \cos 3v\pi + 5q^6 \cos 5v\pi - 7q^{12} \cos 7v\pi + \ldots).$$

(3).

$$\mathrm{K} = x, \quad \mathrm{K}' = x', \quad \mathrm{E} = \frac{2-\varkappa}{3}\mathrm{K} + \frac{\eta_1}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}}, \quad \mathrm{E}' = \frac{\pi}{2\mathrm{K}} + \mathrm{K}'\left(1 - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right);$$

$$\mathrm{H}\,(u) = \mathfrak{I}_1\left(\frac{u}{2\mathrm{K}}\right), \qquad \Theta\,(u) = \mathfrak{I}_4\left(\frac{u}{2\mathrm{K}}\right);$$

$$\mathrm{H}_1(u) = \mathfrak{I}_2\left(\frac{u}{2\mathrm{K}}\right), \qquad \Theta_1(u) = \mathfrak{I}_3\left(\frac{u}{2\mathrm{K}}\right);$$

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt[4]{\varkappa}}\,\frac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)}, \qquad \operatorname{cn} u = \frac{\sqrt[4]{1-\varkappa}}{\sqrt[4]{\varkappa}}\,\frac{\mathrm{H}_1(u)}{\Theta(u)}, \qquad \operatorname{dn} u = \sqrt[4]{1-\varkappa}\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}.$$

(4).

$$u = 2\omega_1 v.$$

$$\sigma(u\,|\,\omega_1, \omega_3) = 2\omega_1 \frac{\mathfrak{I}_1(v\,|\,\tau)}{\mathfrak{I}'_1(0\,|\,\tau)} e^{2\omega_1\eta_1 v^2}, \qquad \sigma_1(u\,|\,\omega_1, \omega_3) = \frac{\mathfrak{I}_2(v\,|\,\tau)}{\mathfrak{I}_1(0\,|\,\tau)} e^{2\omega_1\eta_1 v^2},$$

$$\sigma_2(u\,|\,\omega_1, \omega_3) = \frac{\mathfrak{I}_3(v\,|\,\tau)}{\mathfrak{I}_3(0\,|\,\tau)} e^{2\omega_1\eta_1 v^2}, \qquad \sigma_3(u\,|\,\omega_1, \omega_3) = \frac{\mathfrak{I}_4(v\,|\,\tau)}{\mathfrak{I}_4(0\,|\,\tau)} e^{2\omega_1\eta_1 v^2},$$

$$\zeta(u\,|\,\omega_1, \omega_3) = 2\eta_1 v + \frac{1}{2\omega_1}\,\frac{\mathfrak{I}'_1(v\,|\,\tau)}{\mathfrak{I}_1(v\,|\,\tau)},$$

$$p(u\,|\,\omega_1, \omega_3) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{1}{4\omega_1^2}\,\frac{d}{dv}\left[\frac{\mathfrak{I}'_1(v\,|\,\tau)}{\mathfrak{I}_1(v\,|\,\tau)}\right].$$

CXXIV.

Cas où ε_1, ε_2, ε_3 *sont réels;* $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \geqq 0 > \varepsilon_3$; $\gamma_2 > 0$; $\gamma_3 \leqq 0$; $\mathcal{G} > 0$.

Si ε_1, ε_2, ε_3 sont donnés ($\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$), on prendra

$$\varkappa_0 = 1 - \varkappa = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Si l'on se donne seulement $\varkappa \geqq \frac{1}{2}$, on fixera arbitrairement le nombre positif $(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$ et l'on prendra

$$\varepsilon_1 = \frac{2 - \varkappa}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \qquad \varepsilon_2 = \frac{2\varkappa - 1}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \qquad \varepsilon_3 = \frac{-1 - \varkappa}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3).$$

(1).

$$\beta_0 = \frac{1 - |\sqrt[4]{\varkappa}|}{1 + |\sqrt[4]{\varkappa}|},$$

$$Q = \frac{1}{2}\beta_0 + 2\left(\frac{1}{2}\beta_0\right)^5 + 15\left(\frac{1}{2}\beta_0\right)^9 + 150\left(\frac{1}{2}\beta_0\right)^{13} + \ldots, \qquad Q^{\frac{1}{4}} = |\sqrt[4]{Q}|,$$

$$X_0 = \frac{\pi}{2}(1 + 2Q + 2Q^4 + 2Q^9 + \ldots)^2, \qquad X'_0 = -\frac{1}{\pi} X_0 \log Q,$$

$$-\omega_3 = \Omega_1 = \frac{X_0}{i\,|\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}|}, \qquad \omega_1 = \Omega_3 = \frac{X'_0}{|\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}|},$$

$$T = \frac{\Omega_3}{\Omega_1} = -\frac{\omega_1}{\omega_3} = -\frac{1}{\tau},$$

$$\eta_3 = -H_1 = \frac{\pi^2}{12\,\omega_3} - \frac{2\pi^2}{\omega_3}\left(\frac{Q^2}{1 - Q^2} + 2\frac{Q^4}{1 - Q^4} + 3\frac{Q^6}{1 - Q^6} + 4\frac{Q^8}{1 - Q^8} + \ldots\right),$$

$$\eta_1 = H_3 = \frac{H_1 \Omega_3}{\Omega_1} + \frac{\pi}{2 i \Omega_1} = \frac{\eta_3 \omega_1}{\omega_3} + \frac{\pi i}{2\omega_3}.$$

$$\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = |\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}|, \qquad \sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = |\sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}|;$$

$$\sqrt{\varkappa_0} = |\sqrt{\varkappa_0}|, \quad \sqrt{1 - \varkappa_0} = |\sqrt{1 - \varkappa_0}|, \quad \sqrt[4]{\varkappa_0} = |\sqrt[4]{\varkappa_0}|, \quad \sqrt[4]{1 - \varkappa_0} = |\sqrt[4]{1 - \varkappa_0}|;$$

$$\sqrt{E_1 - E_2} = i\sqrt{1 - \varkappa_0}\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}, \qquad \sqrt{E_2 - E_3} = -i\sqrt{\varkappa_0}\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3},$$

$$\sqrt{E_1 - E_3} = i\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3};$$

$$\sqrt[4]{E_1 - E_2} = e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt[4]{1 - \varkappa_0}\sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}, \qquad \sqrt[4]{E_2 - E_3} = e^{\frac{3\pi i}{4}}\sqrt[4]{\varkappa_0}\sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_3},$$

$$\sqrt[4]{E_1 - E_3} = e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt[4]{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}.$$

CXXIV (SUITE).

(2).

$$\mathfrak{I}_1(iw\,|\,\mathrm{T}) = 2iQ^{\frac{1}{4}}[\mathrm{sh}(w\pi) - Q^2\,\mathrm{sh}(3w\pi) + Q^6\,\mathrm{sh}(5w\pi) - Q^{12}\,\mathrm{sh}(7w\pi) + \ldots],$$

$$\mathfrak{I}_2(iw\,|\,\mathrm{T}) = 2Q^{\frac{1}{4}}\,[\mathrm{ch}(w\pi) + Q^2\,\mathrm{ch}(3w\pi) + Q^6\,\mathrm{ch}(5w\pi) + Q^{12}\,\mathrm{ch}(7w\pi) + \ldots],$$

$$\mathfrak{I}_3(iw\,|\,\mathrm{T}) = 1 + 2Q\,\mathrm{ch}(2w\pi) + 2Q^4\,\mathrm{ch}(4w\pi) + 2Q^9\,\mathrm{ch}(6w\pi) + \ldots,$$

$$\mathfrak{I}_4(iw\,|\,\mathrm{T}) = 1 - 2Q\,\mathrm{ch}(2w\pi) + 2Q^4\,\mathrm{ch}(4w\pi) - 2Q^9\,\mathrm{ch}(6w\pi) + \ldots,$$

$$\mathfrak{I}'_1(iw\,|\,\mathrm{T}) = 2\pi Q^{\frac{1}{4}}[\mathrm{ch}(w\pi) - 3Q^2\,\mathrm{ch}(3w\pi) + 5Q^6\,\mathrm{ch}(5w\pi) - 7Q^{12}\,\mathrm{ch}(7w\pi) + \ldots],$$

$$\mathrm{sh}(w\pi) = \tfrac{1}{2}(e^{w\pi} - e^{-w\pi}); \qquad \mathrm{ch}(w\pi) = \tfrac{1}{2}(e^{w\pi} + e^{-w\pi}).$$

---

(3).

$$\mathrm{K} = \mathrm{X}'_0, \qquad \mathrm{K}' = \mathrm{X}_0,$$

$$\mathrm{E} = \frac{1 + \varkappa_0}{3}\,\mathrm{X}'_0 + \frac{\eta_1}{|\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\,|}, \qquad \mathrm{E}' = \frac{2 - \varkappa_0}{3}\,\varkappa_0 - \frac{\eta_3}{i\,|\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\,|};$$

$$w = \frac{u}{2\mathrm{X}_0}; \qquad \sqrt{\mathrm{T}} = e^{\frac{\pi i}{4}}\left|\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{i}}\right|.$$

$$\mathrm{H}\,(u) = e^{-\frac{3\pi i}{4}}\sqrt{\mathrm{T}}\,e^{-\frac{w^2\pi i}{\mathrm{T}}}\,\mathfrak{I}_1(iw\,|\,\mathrm{T}), \qquad \Theta\,(u) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\mathrm{T}}\,e^{-\frac{w^2\pi i}{\mathrm{T}}}\,\mathfrak{I}_2(iw\,|\,\mathrm{T}),$$

$$\mathrm{H}_1(u) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\mathrm{T}}\,e^{-\frac{w^2\pi i}{\mathrm{T}}}\,\mathfrak{I}_4(iw\,|\,\mathrm{T}), \qquad \Theta_1(u) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\mathrm{T}}\,e^{-\frac{w^2\pi i}{\mathrm{T}}}\,\mathfrak{I}_3(iw\,|\,\mathrm{T});$$

$$\mathrm{sn}\,u = \frac{-i}{\sqrt[4]{1-\varkappa_0}}\,\frac{\mathfrak{I}_1(iw\,|\,\mathrm{T})}{\mathfrak{I}_2(iw\,|\,\mathrm{T})}, \quad \mathrm{cn}\,u = \frac{\sqrt[4]{\varkappa_0}}{\sqrt[4]{1-\varkappa_0}}\,\frac{\mathfrak{I}_4(iw\,|\,\mathrm{T})}{\mathfrak{I}_2(iw\,|\,\mathrm{T})}, \quad \mathrm{dn}\,u = \sqrt[4]{\varkappa_0}\,\frac{\mathfrak{I}_3(iw\,|\,\mathrm{T})}{\mathfrak{I}_2(iw\,|\,\mathrm{T})}.$$

---

(4).

$$u = 2\Omega_1 iw = -2\omega_3 iw.$$

$$\sigma\,(u\,|\,\omega_1, \omega_3) = \sigma\,(u\,|\,\Omega_1, \Omega_3) = 2i\Omega_1\,\frac{\frac{1}{i}\mathfrak{I}_1(iw\,|\,\mathrm{T})}{\mathfrak{I}'_1(0\,|\,\mathrm{T})}\,e^{-2\mathrm{H}_1\Omega_1 w^2},$$

$$\sigma_1(u\,|\,\omega_1, \omega_3) = \sigma_3(u\,|\,\Omega_1, \Omega_3) = \frac{\mathfrak{I}_4(iw\,|\,\mathrm{T})}{\mathfrak{I}_4(0\,|\,\mathrm{T})}\,e^{-2\mathrm{H}_1\Omega_1 w^2},$$

$$\sigma_2(u\,|\,\omega_1, \omega_3) = \sigma_2(u\,|\,\Omega_1, \Omega_3) = \frac{\mathfrak{I}_3(iw\,|\,\mathrm{T})}{\mathfrak{I}_3(0\,|\,\mathrm{T})}\,e^{-2\mathrm{H}_1\Omega_1 w^2},$$

$$\sigma_3(u\,|\,\omega_1, \omega_3) = \sigma_1(u\,|\,\Omega_1, \Omega_3) = \frac{\mathfrak{I}_2(iw\,|\,\mathrm{T})}{\mathfrak{I}_2(0\,|\,\mathrm{T})}\,e^{-2\mathrm{H}_1\Omega_1 w^2};$$

$$\zeta(u\,|\,\omega_1, \omega_3) = -\frac{\mathrm{H}_1}{i}\,\frac{u}{\Omega_1 i} + \frac{1}{2\Omega_1}\,\frac{\mathfrak{I}'_1(iw\,|\,\mathrm{T})}{\mathfrak{I}_1(iw\,|\,\mathrm{T})},$$

$$\wp(u\,|\,\omega_1, \omega_3) = \frac{\mathrm{H}_1\Omega_1}{(\Omega_1 i)^2} - \frac{1}{(2\Omega_1 i)^2}\,\frac{d}{dw}\left[\frac{\mathfrak{I}'_1(iw\,|\,\mathrm{T})}{\frac{1}{i}\mathfrak{I}_1(iw\,|\,\mathrm{T})}\right].$$

---

(5).

Dans le cas limite où $\varepsilon_2 = 0$, $\varkappa_0 = \varkappa = \frac{1}{2}$, $\gamma_3 = 0$, $\gamma_2 = 4e_1^2 = 4e_3^2$, $\omega_1 = \frac{\omega_3}{i}$, $\tau = i$, $q = e^{-\pi}$.

CXXV.

Cas où $\varepsilon_1 = A + Bi$, $\varepsilon_2 = -2A$, $\varepsilon_3 = A - Bi$, A *et* B *étant réels*,
$A \leqq 0$, $B > 0$, $\gamma_3 \geqq 0$, $\mathcal{G} < 0$.

Si $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont donnés ($\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$), on prendra

$$\varkappa = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \frac{1}{2} - \frac{-3A}{2B}\,i.$$

Si l'on se donne seulement $\varkappa$, on fixera arbitrairement le nombre positif B et l'on prendra

$$\varepsilon_1 = \frac{2(2-\varkappa)}{3}\,Bi, \qquad \varepsilon_2 = \frac{2(2\varkappa - 1)}{3}\,Bi, \qquad \varepsilon_3 = -\frac{2(\varkappa+1)}{3}\,Bi.$$

(1).

On formera successivement :

ψ tel que l'on ait

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{B}{-3A}, \quad 0 < \psi \leqq \frac{\pi}{2};$$

$$\frac{1}{i}Q = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\psi}{4} + 2\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\psi}{4}\right)^5 + 15\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\psi}{4}\right)^9 + 150\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\psi}{4}\right)^{13} - \ldots;$$

$$Q^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi i}{8}}\left|\sqrt[4]{\frac{Q}{i}}\right|,$$

$$\sqrt[4]{\varkappa} = \frac{e^{-i\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\psi}{4}\right)}}{\left|\sqrt[4]{2\sin\psi}\right|}, \qquad \sqrt[4]{1-\varkappa} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\psi}{4}\right)}}{\left|\sqrt[4]{2\sin\psi}\right|};$$

$$\omega_1 + \omega_3 = \Omega_1 = \frac{\pi}{2}\left|\sqrt{\frac{\sin\psi}{B}}\right|\frac{(1 + 2Q^4 + 2Q^{16} + \ldots)^2}{\cos^2\frac{\psi}{4}};$$

$$\sqrt{\Omega_1} = \left|\sqrt{\Omega_1}\right|,$$

$$\frac{\omega_3 - \omega_1}{i} = \frac{2\Omega_3 - \Omega_1}{i} = \frac{2\Omega_1}{\pi}\log\frac{i}{Q},$$

où le logarithme est réel.

$$T = \frac{\Omega_3}{\Omega_1} = \frac{\tau}{1+\tau};$$

$$H_1 = \frac{\pi^2}{12\Omega_1} - \frac{2\pi^2}{\Omega_1}\left[\frac{Q^2}{1-Q^2} + 2\,\frac{Q^4}{1-Q^4} + 3\,\frac{Q^6}{1-Q^6} + \ldots\right] = -\frac{1}{12\Omega_1}\frac{\mathfrak{S}_1'''(0\,|\,T)}{\mathfrak{S}_1'(0\,|\,T)},$$

$$H_3 = \frac{\Omega_3 H_1}{\Omega_1} - \frac{\pi i}{2\Omega_1}, \quad \eta_1 = H_1 - H_3, \quad \eta_3 = H_3.$$

CXXV (suite).

(1) [*suite*].

$$\sqrt{E_1 - E_2} = \left|\sqrt{\frac{B}{\sin\psi}}\right| e^{-\frac{\psi i}{2}}, \qquad \sqrt[4]{E_1 - E_2} = \left|\sqrt[4]{\frac{B}{\sin\psi}}\right| e^{-\frac{\psi i}{4}}.$$

$$\sqrt{E_2 - E_3} = \left|\sqrt{2B}\right| e^{\frac{5\pi i}{4}}, \qquad \sqrt[4]{E_2 - E_3} = \left|\sqrt[4]{2B}\right| e^{\frac{5\pi i}{8}},$$

$$\sqrt{E_1 - E_3} = \left|\sqrt{\frac{B}{\sin\psi}}\right| e^{\frac{\psi i}{2}}, \qquad \sqrt[4]{E_1 - E_3} = \left|\sqrt[4]{\frac{B}{\sin\psi}}\right| e^{\frac{\psi i}{4}}.$$

(2).

$$\mathfrak{J}_1(v \mid \tau) = 2Q^{\frac{1}{4}}[\sin v\pi - Q^2 \sin 3v\pi + Q^6 \sin 5v\pi - Q^{12} \sin 7v\pi + \ldots],$$

$$\mathfrak{J}_2(v \mid \tau) = 2Q^{\frac{1}{4}}[\cos v\pi + Q^2 \cos 3v\pi + Q^6 \cos 5v\pi + Q^{12} \cos 7v\pi + \ldots],$$

$$\mathfrak{J}_3(v \mid \tau) = 1 + 2Q \cos 2v\pi + 2Q^4 \cos 4v\pi + 2Q^9 \cos 6v\pi + \ldots,$$

$$\mathfrak{J}_4(v \mid \tau) = 1 - 2Q \cos 2v\pi + 2Q^4 \cos 4v\pi - 2Q^9 \cos 6v\pi + \ldots,$$

$$\mathfrak{J}'_1(v \mid \tau) = 2\pi Q^{\frac{1}{4}}[\cos v\pi - 3Q^2 \cos 3v\pi + 5Q^6 \cos 5v\pi - 7Q^{12} \cos 7v\pi + \ldots].$$

(3).

$$u = 2\Omega_1 v.$$

$$\sigma\,(u \mid \omega_1, \omega_3) = \sigma\,(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = 2\Omega_1 \frac{\mathfrak{J}_1(v \mid \tau)}{\mathfrak{J}'_1(0 \mid \tau)} e^{2H_1\Omega_1 v^2},$$

$$\sigma_1(u \mid \omega_1, \omega_3) = \sigma_2(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \frac{\mathfrak{J}_3(v \mid \tau)}{\mathfrak{J}_3(0 \mid \tau)} e^{2H_1\Omega_1 v^2}.$$

$$\sigma_2(u \mid \omega_1, \omega_3) = \sigma_1(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \frac{\mathfrak{J}_2(v \mid \tau)}{\mathfrak{J}_2(0 \mid \tau)} e^{2H_1\Omega_1 v^2},$$

$$\sigma_3(u \mid \omega_1, \omega_3) = \sigma_3(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \frac{\mathfrak{J}_4(v \mid \tau)}{\mathfrak{J}_4(0 \mid \tau)} e^{2H_1\Omega_1 v^2},$$

$$\zeta\,(u \mid \omega_1, \omega_3) = \zeta\,(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \frac{H_1}{\Omega_1} u + \frac{1}{2\Omega_1} \frac{\mathfrak{J}'_1(v \mid \tau)}{\mathfrak{J}_1(v \mid \tau)},$$

$$\wp\,(u \mid \omega_1, \omega_3) = -\frac{H_1}{\Omega_1} - \frac{1}{4\Omega_1^2} \frac{d}{dv}\left[\frac{\mathfrak{J}'_1(v \mid \tau)}{\mathfrak{J}_1(v \mid \tau)}\right].$$

CXXVI.

Cas où $\varepsilon_1 = A + Bi$, $\varepsilon_2 = -2A$, $\varepsilon_3 = A - Bi$, A *et* B *étant réels,*
$A \geqq 0$, $B > 0$, $\gamma_3 \leqq 0$, $\mathcal{G} < 0$.

Si ε_1, ε_2, ε_3 sont donnés ($\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$), on prendra

$$\varkappa = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \frac{1}{2} + \frac{3A}{2B}i.$$

Si l'on se donne seulement $\varkappa$, on fixera arbitrairement le nombre positif B et l'on prendra

$$\varepsilon_1 = \frac{2(2-\varkappa)}{3}Bi, \qquad \varepsilon_2 = \frac{2(2\varkappa - 1)}{3}Bi, \qquad \varepsilon_3 = -\frac{2(\varkappa+1)}{3}Bi.$$

(1).

On formera successivement :

φ tel que l'on ait

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{B}{3A}, \quad 0 < \varphi \leqq \frac{\pi}{2};$$

$$\frac{1}{i}Q = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{4} + 2\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{4}\right)^5 + 15\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{4}\right)^9 + 150\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{4}\right)^{13} + \ldots,$$

$$Q^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi i}{8}}\left|\sqrt[4]{\frac{Q}{i}}\right|,$$

$$\sqrt[4]{\varkappa} = \frac{e^{\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right)i}}{\left|\sqrt[4]{2\sin\varphi}\right|}, \qquad \sqrt[4]{1-\varkappa} = \frac{e^{-\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right)i}}{\left|\sqrt[4]{2\sin\varphi}\right|};$$

$$i(\omega_1 - \omega_3) = i\Omega_1 = \frac{\pi}{2}\left|\sqrt{\frac{\sin\varphi}{B}}\right|\frac{(1 + 2Q^4 + 2Q^{16} + \ldots)^2}{\cos^2\frac{\varphi}{4}};$$

$$\omega_1 + \omega_3 = 2\Omega_3 - \Omega_1 = \frac{2i\Omega_1}{\pi}\log\frac{i}{Q},$$

où le logarithme est réel.

$$T = \frac{\Omega_3}{\Omega_1} = \frac{1}{1-\tau};$$

$$H_1 = \frac{\pi^2}{12\Omega_1} - \frac{2\pi^2}{\Omega_1}\left[\frac{Q^2}{1-Q^2} + 2\frac{Q^4}{1-Q^4} + 3\frac{Q^6}{1-Q^6} + \ldots\right] = -\frac{1}{12\Omega_1}\frac{\mathfrak{S}_1'''(0|T)}{\mathfrak{S}_1'(0|T)},$$

$$H_3 = \frac{\pi}{2i\Omega_1} + \frac{(2\Omega_3 - \Omega_1)H_1 i}{2i\Omega_1} + \frac{H_1}{2}, \quad \eta_1 = H_3, \quad \eta_3 = H_3 - H_1;$$

CXXVI (SUITE).

(1) [*suite*].

$$\sqrt{E_1 - E_2} = i\left|\sqrt{\frac{B}{\sin\varphi}}\right| e^{-\frac{\varphi i}{2}}, \qquad \sqrt[4]{E_1 - E_2} = \left|\sqrt[4]{\frac{B}{\sin\varphi}}\right| e^{\frac{(\pi-\varphi)i}{4}},$$

$$\sqrt{E_2 - E_3} = |\sqrt{2B}|\, e^{-\frac{\pi i}{4}}, \qquad \sqrt[4]{E_2 - E_3} = |\sqrt[4]{2B}|\, e^{\frac{7\pi i}{8}},$$

$$\sqrt{E_1 - E_3} = i\left|\sqrt{\frac{B}{\sin\varphi}}\right| e^{\frac{\varphi i}{2}}, \qquad \sqrt[4]{E_1 - E_3} = \left|\sqrt[4]{\frac{B}{\sin\varphi}}\right| e^{\frac{(\pi+\varphi)i}{4}}.$$

(2).

$$\mathfrak{I}_1(iw \mid T) = 2iQ^{\frac{1}{4}}[\operatorname{sh}(w\pi) - Q^2 \operatorname{sh}(3w\pi) + Q^6 \operatorname{sh}(5w\pi) - Q^{12} \operatorname{sh}(7w\pi) + \ldots],$$

$$\mathfrak{I}_2(iw \mid T) = 2Q^{\frac{1}{4}}[\operatorname{ch}(w\pi) + Q^2 \operatorname{ch}(3w\pi) + Q^6 \operatorname{ch}(5w\pi) + Q^{12} \operatorname{ch}(7w\pi) + \ldots],$$

$$\mathfrak{I}_3(iw \mid T) = 1 + 2Q \operatorname{ch}(2w\pi) + 2Q^4 \operatorname{ch}(4w\pi) + 2Q^9 \operatorname{ch}(6w\pi) + \ldots,$$

$$\mathfrak{I}_4(iw \mid T) = 1 - 2Q \operatorname{ch}(2w\pi) + 2Q^4 \operatorname{ch}(4w\pi) - 2Q^9 \operatorname{ch}(6w\pi) + \ldots,$$

$$\mathfrak{I}'_1(iw \mid T) = 2\pi Q^{\frac{1}{4}}[\operatorname{ch}(w\pi) - 3Q^2 \operatorname{ch}(3w\pi) + 5Q^6 \operatorname{ch}(5w\pi) - 7Q^{12} \operatorname{ch}(7w\pi) + \ldots].$$

(3).

$$u = 2i\Omega_1 w = 2i(\omega_1 - \omega_3)w.$$

$$\sigma(u \mid \omega_1, \omega_3) = \sigma(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = 2i\Omega_1 \frac{\frac{1}{i}\mathfrak{I}'_1(iw \mid T)}{\mathfrak{I}'_1(0 \mid T)} e^{-2H_1\Omega_1 w^2},$$

$$\sigma_1(u \mid \omega_1, \omega_3) = \sigma_3(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \frac{\mathfrak{I}_4(iw \mid T)}{\mathfrak{I}_4(0 \mid T)} e^{-2H_1\Omega_1 w^2},$$

$$\sigma_2(u \mid \omega_1, \omega_3) = \sigma_1(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \frac{\mathfrak{I}_2(iw \mid T)}{\mathfrak{I}_2(0 \mid T)} e^{-2H_1\Omega_1 w^2},$$

$$\sigma_3(u \mid \omega_1, \omega_3) = \sigma_2(u \mid \Omega_1, \Omega_3) = \frac{\mathfrak{I}_3(iw \mid T)}{\mathfrak{I}_3(0 \mid T)} e^{-2H_1\Omega_1 w^2},$$

$$\zeta(u \mid \omega_1, \omega_3) = -\frac{\Omega_1 H_1}{(i\Omega_1)^2} u + \frac{1}{2i\Omega_1} \frac{\mathfrak{I}'_1(iw \mid T)}{\frac{1}{i}\mathfrak{I}_1(iw \mid T)},$$

$$p(u \mid \omega_1, \omega_3) = \frac{\Omega_1 H_1}{(i\Omega_1)^2} - \frac{1}{(2i\Omega_1)^2} \frac{d}{dw}\left[\frac{\mathfrak{I}'_1(iw \mid T)}{\frac{1}{i}\mathfrak{I}_1(iw \mid T)}\right].$$

CXXVII.

(1).

Si l'on se donne deux nombres z et k tels que $|k| < 1$, $|kz| < 1$, on satisfera à l'équation

$$\operatorname{sn}(u, k) = z,$$

en posant

$$u = \frac{1}{i}\lambda(k^2)\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) - \sqrt{1-z^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right]^2 k^{2n}\mathcal{G}_n(z),$$

où

$$\lambda(k^2) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \ldots + \left[\frac{1.3\ldots(2\nu-1)}{2.4\ldots 2\nu}\right]^2 k^{2\nu} + \ldots,$$

$$\mathcal{G}_1(z) = z; \quad \mathcal{G}_n(z) = z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{2.4}{3.5}z^5 + \ldots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}z^{2n-1},$$

et où l'on a fixé arbitrairement celle des deux déterminations que l'on veut de $\sqrt{1-z^2}$, puis celle des déterminations de $\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$.

Si l'on se donne, en outre, l'un des deux nombres z' tels que l'on ait $z'^2 = (1-z^2)(1-k^2z^2)$, la valeur de u, calculée au moyen de la formule précédente, satisfera aux deux équations concordantes

$$\operatorname{sn}(u, k) = z, \qquad \frac{d\operatorname{sn}(u, k)}{du} = z',$$

pourvu que, ayant fixé $\sqrt{1-k^2z^2}$ par la condition que sa partie réelle soit positive, l'on choisisse pour $\sqrt{1-z^2}$ la détermination $\dfrac{z'}{\sqrt{1-k^2z^2}}$.

(2).

Si l'on se donne deux nombres z et k tels que $|k| < 1$, $|z| > 1$, on satisfera à l'équation

$$\operatorname{sn}(u, k) = z,$$

en posant

$$u = \frac{\pi}{2i}\lambda(1-k^2) + \frac{1}{i}\lambda(k^2)\log\left(\frac{i}{kz} + \sqrt{1 - \frac{1}{k^2z^2}}\right)$$
$$-\sqrt{1-\frac{1}{k^2z^2}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right]^2 k^{2n}\mathcal{G}_n\left(\frac{1}{kz}\right),$$

où l'on a fixé arbitrairement celle des deux déterminations que l'on veut de $\sqrt{1-\frac{1}{k^2z^2}}$, puis celle des déterminations de $\log\left(\frac{i}{kz} + \sqrt{1-\frac{1}{k^2z^2}}\right)$.

CXXVII (suite).

(2) [*suite*].

Si l'on se donne, en outre, l'un des deux nombres z' tels que l'on ait $z'^2 = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2)$, la valeur de u, calculée au moyen de la formule précédente, satisfera aux deux équations concordantes

$$\mathrm{sn}(u, k) = z, \qquad \frac{d\,\mathrm{sn}(u, k)}{du} = z',$$

pourvu que, ayant fixé $\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}$ par la condition que sa partie réelle soit positive, l'on choisisse pour $\sqrt{1 - \frac{1}{k^2 z^2}}$ la détermination $\dfrac{-z'}{k\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}}$.

(3).

On donne p, ε_1, ε_2, ε_3 et l'on suppose

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \qquad \gamma_2 = 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2), \qquad \gamma_3 = 4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3,$$

$$\varkappa = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}, \qquad 1 - \varkappa = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3};$$

$\sqrt[4]{1 - \varkappa}$ a son argument compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$, $\qquad \beta = \dfrac{1 - \sqrt[4]{1 - \varkappa}}{1 + \sqrt[4]{1 - \varkappa}}$,

$$\lambda(\beta^4) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \beta^4 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \beta^8 + \ldots + \left[\frac{1.3\ldots(2\nu - 1)}{2.4\ldots 2\nu}\right]^2 \beta^{4\nu} + \ldots;$$

$$\mathrm{B}_1 = \lambda(\beta^4) - 1, \qquad \mathrm{B}_2 = \mathrm{B}_1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \beta^4, \qquad \mathrm{B}_3 = \mathrm{B}_2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \beta^8, \qquad \ldots;$$

$$z = \frac{1}{\beta}\,\frac{1 - \Pi}{1 + \Pi};$$

Π désignant celle des déterminations de $\Pi = \sqrt[4]{1 - \varkappa}\sqrt{\dfrac{\mathrm{p} - \varepsilon_3}{\mathrm{p} - \varepsilon_2}}$ dont la partie réelle est positive; les déterminations de $\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$, $\sqrt{1 - z^2}$, puis celle de $\log\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right)$ sont fixées arbitrairement.

Dans ces conditions, on satisfera à l'équation

$$p(u; \gamma_2, \gamma_3) = \mathrm{p},$$

en posant

$$u = 2\lambda(\beta^4)\,\frac{\log\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right)}{i\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\left(1 + \sqrt[4]{1 - \varkappa}\right)^2}$$
$$+ \frac{2\sqrt{1 - z^2}}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\left(1 + \sqrt[4]{1 - \varkappa}\right)^2}\left(\mathrm{B}_1 z + \frac{2}{3}\,\mathrm{B}_2 z^3 + \frac{2.4}{3.5}\,\mathrm{B}_3 z^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\,\mathrm{B}_4 z^7 + \ldots\right).$$

CXXVII (SUITE).

(3) [*suite*].

Si l'on se donne, en outre, l'un des deux nombres P' tel que l'on ait $\mathrm{P}'^2 = 4\mathrm{P}^3 - \gamma_2\mathrm{P} - \gamma_3$, la valeur de u, calculée au moyen de la formule précédente, satisfera aux deux équations concordantes

$$p(u;\,\gamma_2,\gamma_3) = \mathrm{P},\qquad p'(u;\,\gamma_2,\gamma_3) = \mathrm{P}',$$

pourvu que, ayant fixé $\sqrt{1-\beta^4 z^2}$ par la condition que sa partie réelle soit positive, on prenne $\dfrac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}}$ égal à

$$\frac{-\mathrm{P}'}{(\mathrm{P}-\varepsilon_2)(\mathrm{P}-\varepsilon_3)}\,\frac{\left(1+\sqrt{1-\varkappa}\right)(1-\beta^2 z^2)}{2\sqrt{1-\beta^4 z^2}}.$$

CXXVIII.

	NUMÉROS D'ORDRE DE LA RÉGION.				
	I ou II. $\lvert\varkappa\rvert<1$, $\lvert\varkappa\rvert<\lvert\varkappa-1\rvert$.	III. $\lvert\varkappa\rvert>1$, $\lvert\varkappa-1\rvert>1$, $\lvert\varkappa\rvert>\lvert\varkappa-1\rvert$.	IV. $\lvert\varkappa\rvert>1$, $\lvert\varkappa-1\rvert>1$, $\lvert\varkappa\rvert<\lvert\varkappa-1\rvert$.	V ou VI. $\lvert\varkappa-1\rvert<1$, $\lvert\varkappa\rvert>\lvert\varkappa-1\rvert$.	$\varkappa = \dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$.
Valeur de χ.	$\sqrt[4]{1-\varkappa}$	$\sqrt[4]{1-\dfrac{1}{\varkappa}}$	$\sqrt[4]{1-\dfrac{1}{1-\varkappa}}$	$\sqrt[4]{\varkappa}$	Les arguments des racines sont compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.
Valeur de $\dfrac{\Pi_0}{\chi}$.	$\sqrt{\dfrac{\mathrm{P}-\varepsilon_3}{\mathrm{P}-\varepsilon_2}}$	$\sqrt{\dfrac{\mathrm{P}-\varepsilon_3}{\mathrm{P}-\varepsilon_1}}$	$\sqrt{\dfrac{\mathrm{P}-\varepsilon_1}{\mathrm{P}-\varepsilon_3}}$	$\sqrt{\dfrac{\mathrm{P}-\varepsilon_1}{\mathrm{P}-\varepsilon_2}}$	Les racines sont déterminées de façon que la partie réelle de Π_0 soit positive.
Valeur de ρ..	1	$\sqrt{\varkappa}$	$i\sqrt{1-\varkappa}$	i	Les parties réelles des racines $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{1-\varkappa}$ sont positives.
Valeur de R.	$(\mathrm{P}-\varepsilon_2)(\mathrm{P}-\varepsilon_3)$	$(\mathrm{P}-\varepsilon_3)(\mathrm{P}-\varepsilon_1)$	$(\mathrm{P}-\varepsilon_3)(\mathrm{P}-\varepsilon_1)$	$(\mathrm{P}-\varepsilon_1)(\mathrm{P}-\varepsilon_2)$	

CXXVIII (suite).

On donne ε_1, ε_2, ε_3, γ_2, γ_3, P, P' tels que

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=0,\quad \gamma_2=2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2);\quad \gamma_3=4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3,\quad \mathrm{P}'^2=4\mathrm{P}^3-\gamma_2\mathrm{P}-\gamma_3.$$

Pour déterminer une valeur de u vérifiant les deux équations concordantes

$$p(u;\gamma_2,\gamma_3)=\mathrm{P},\qquad p'(u;\gamma_2,\gamma_3)=\mathrm{P}',$$

on formera d'abord les quantités χ, Π_0, ρ, R d'après le Tableau précédent, puis les quantités β_0, z_0, $\lambda(\beta_0^4)$, B_{i0}, S_0 au moyen des formules

$$\beta_0=\frac{1-\chi}{1+\chi},\quad z_0=\frac{1}{\beta_0}\,\frac{1-\Pi_0}{1+\Pi_0},\quad \lambda(\beta_0^4)=1+\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left[\frac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{2.4.6\ldots2\nu}\right]^2\beta_0^{4\nu},$$

$$\mathrm{B}_{10}=\lambda(\beta_0^4)-1;\qquad \mathrm{B}_{20}=\mathrm{B}_{10}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\beta_0^4;\qquad \mathrm{B}_{30}=\mathrm{B}_{20}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\beta_0^8;$$

$$\mathrm{B}_{i,0}=\mathrm{B}_{i-1,0}-\left[\frac{1.3\ldots(2i-3)}{2.4\ldots(2i-2)}\right]^2\beta_0^{4i-4}=\sum_{\nu=i}^{\nu=\infty}\left[\frac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{2.4.6\ldots2\nu}\right]^2\beta_0^{4\nu},$$

$$\mathrm{S}_0=\mathrm{S}(z_0)=\mathrm{B}_{10}z_0+\frac{2}{3}\mathrm{B}_{20}z_0^3+\frac{2.4}{3.5}\mathrm{B}_{30}z_0^5+\frac{2.4.6}{3.5.7}\mathrm{B}_{40}z_0^7+\ldots.$$

Si, en formant S_0, on s'arrête au terme en z_0^{2n-1}, l'erreur commise est inférieure à

$$\frac{|\beta_0^{4n+4}z_0^{2n+1}|}{(n+1)|\sqrt{(4n+2)\pi}|(1-|\beta_0^4|)(1-|\beta_0^4z_0^2|)}.$$

On remarquera que $\lambda(\beta_0^4)$ peut aussi être calculé au moyen de

$$q=\frac{1}{2}\beta_0+2\left(\frac{1}{2}\beta_0\right)^5+15\left(\frac{1}{2}\beta_0\right)^9+\ldots$$

par la formule

$$\lambda(\beta_0^4)=\frac{1}{4}(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)^2(1+\chi)^2.$$

Ceci posé, on a

$$u=\frac{2\lambda(\beta_0^4)\log\left(z_0+i\sqrt{1-z_0^2}\right)}{i\rho\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\,(1+\chi)^2}+\frac{2\sqrt{1-z_0^2}\,\mathrm{S}_0}{\rho\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\,(1+\chi)^2},$$

pourvu que l'on prenne pour $\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$, $\sqrt{1-z_0^2}$ des déterminations de ces racines pour lesquelles on ait

$$\frac{\sqrt{1-z_0^2}}{\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}}=\frac{-\mathrm{P}'\rho(1+\chi^2)(1-\beta_0^2z_0^2)}{2\mathrm{R}\sqrt{1-\beta_0^4z_0^2}},$$

où la partie réelle de $\sqrt{1-\beta_0^4z_0^2}$ est positive.

CXXIX.

Cas où γ_2 et γ_3 sont réels.

(1).

Si l'on est dans le cas du Tableau (CXXIII), on conservera aux quantités β, q, $q^{\frac{1}{4}}$, x, x', ω_1, ω_3, τ, η_1, η_3 la signification adoptée dans ce Tableau, et l'on appliquera les formules (CXXVIII) qui correspondent au cas où $\varkappa$ est dans la région I. La quantité β_0 est alors égale à β et est comprise entre o et $\frac{1}{10}$; on prendra pour $\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$ sa détermination positive et l'on aura

$$\lambda(\beta^4) = \left|\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\right| \frac{\omega_1}{2\pi}\left[1+\sqrt[4]{1-\varkappa}\right]^2.$$

Si p est réel et plus grand que ε_1, z_0 est réel et compris entre -1 et $+1$; δ désignant l'unité positive ou négative suivant que p' est négatif ou positif, on prendra pour θ une solution des deux équations

$$z_0 = \cos\theta, \qquad \delta\left|\sqrt{1-z_0^2}\right| = \sin\theta,$$

et l'on aura une solution réelle des deux équations concordantes

$$p(u;\gamma_2,\gamma_3) = p, \qquad p'(u;\gamma_2,\gamma_3) = p',$$

par la formule

$$u = \frac{\omega_1}{\pi}\theta + \frac{2\sin\theta}{\left|\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\right|\left[1+\sqrt[4]{1-\varkappa}\right]^2} S(\cos\theta).$$

L'erreur commise sur $S(z_0)$ en s'arrêtant au terme en z_0^n est moindre que

$$\frac{3}{2\left|\sqrt{4n+2}\right|}\,\frac{1}{10^{4n+4}}.$$

En ne conservant qu'*un* terme dans $S(\cos\theta)$, l'erreur commise sur u sera moindre que $\dfrac{\beta^8}{45\left|\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\right|}$ ou que $\dfrac{1}{10^{10}\left|\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\right|}$.

(2).

Si l'on est dans le cas du Tableau (CXXIV), on conservera aux quantités β_0, Q, $Q^{\frac{1}{4}}$, X_0, X'_0, Ω_1, Ω_3, T, H_1, H_3 la signification adoptée dans ce Tableau, et l'on appliquera les formules (CXXVIII) relatives au cas où $\varkappa$ est dans la région V. On aura

$$\lambda(\beta_0^4) = \left|\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\right| \frac{\omega_3}{2i\pi}\left[1+\sqrt[4]{\varkappa}\right]^2.$$

CXXIX (SUITE).

(2) [*suite*].

Si P est réel et plus grand que ε_1, z_0 est réel et compris entre 1 et $\frac{1}{\beta_0}$; on prendra pour θ la solution réelle des deux équations

$$z_0 = \operatorname{ch}\theta, \qquad \delta\left|\sqrt{z_0^2 - 1}\right| = \operatorname{sh}\theta,$$

où δ est égal à $+1$ ou à -1, suivant que P′ est négatif ou positif, et l'on aura une solution réelle des deux équations concordantes $p(u; \gamma_2, \gamma_3) = \text{P}$, $p'(u; \gamma_2, \gamma_3) = \text{P}'$ par la formule

$$u = \frac{\omega_3}{i\pi}\,\theta + \frac{2\operatorname{sh}\theta}{\left|\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\right|\left[1 + \sqrt[4]{\varkappa}\right]^2}\,S(\operatorname{ch}\theta).$$

En ne conservant que *deux* termes dans $S(\operatorname{ch}\theta)$, l'erreur commise sur u sera moindre que $\dfrac{\beta_0^6}{28\left|\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\right|}$, et, quel que soit β_0, moindre que $\dfrac{2}{10^8\left|\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\right|}$.

(3).

Si l'on est dans le cas du Tableau (CXXV), on conservera aux quantités A, B, ψ, β_0, Q, $\text{Q}^{\frac{1}{4}}$, X_0, X'_0, Ω_1, Ω_3, T, H_1, H_3 la signification qu'elles ont dans ce Tableau, et l'on appliquera les formules (CXXVIII) relatives au cas où $\varkappa$ est dans la région III. On aura

$$\chi = e^{-\frac{i\psi}{2}}, \qquad \beta_0 = i\operatorname{tang}\frac{\psi}{4}, \qquad \lambda(\beta_0^4) = 4\cos^2\frac{\psi}{4}\left|\sqrt{\frac{\text{B}}{\sin\psi}}\right|\frac{\omega_1 + \omega_3}{2\pi}.$$

Si P est réel, plus grand que ε_2, on calculera successivement les nombres réels α, z_0, θ, u par les formules

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\text{B}}{\text{P} - \text{A}}, \qquad 0 < \alpha < \psi,$$

$$z_0 = \cot\frac{\psi}{4}\operatorname{tang}\left(\frac{\psi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\theta,$$

$$\sqrt{1 - z_0^2} = \delta\,\frac{\left|\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\psi - \alpha}{2}}\right|}{\sin\frac{\psi}{4}\cos\left(\frac{\psi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \sin\theta,$$

$$u = \frac{\omega_1 + \omega_3}{\pi}\,\theta + \frac{\sin\theta\left|\sqrt{\sin\psi}\right|}{2\cos^2\frac{\psi}{4}\left|\sqrt{\text{B}}\right|}\,S(z_0).$$

Dans ces formules, δ désigne l'unité positive ou négative suivant que P′ est négatif ou positif.

CXXIX (SUITE).

(4).

Si l'on est dans le cas du Tableau (CXXVI), on conservera aux quantités A, B, φ, β_0, Q, $Q^{\frac{1}{4}}$, X_0, X'_0, Ω_1, Ω_3, T, H_1, H_3 la signification adoptée dans ce Tableau, et l'on appliquera les formules (CXXVIII) relatives au cas où x est dans la région IV. On aura

$$\chi = e^{-\frac{i\varphi}{2}}, \qquad \beta_0 = i \tan g \frac{\varphi}{4}, \qquad \lambda(\beta_0^{\frac{1}{4}}) = 4\cos^2\frac{\varphi}{4}\left|\sqrt{\frac{B}{\sin\varphi}}\right|\frac{\omega_3-\omega_1}{2i\pi}.$$

Si p est réel, plus grand que $\varepsilon_2 + \frac{B}{\sin\varphi}$, on calculera successivement les nombres réels α, z_0, θ, u par les formules

$$\tan g\alpha = \frac{B}{p-A}, \qquad 0 < \alpha < \frac{1}{2}(\pi - \varphi),$$

$$z_0 = \cot\frac{\varphi}{4}\tan g\left(\frac{\varphi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{ch}\theta,$$

$$\sqrt{z_0^2 - 1} = \frac{\delta\left|\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\varphi+\alpha}{2}}\right|}{\sin\frac{\varphi}{4}\cos\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)} = \operatorname{sh}\theta;$$

$$u = \frac{\omega_3-\omega_1}{i\pi}\theta + \frac{\left|\sqrt{\sin\varphi}\right|\operatorname{sh}\theta}{2\left|\sqrt{B}\right|\cos^2\frac{\varphi}{4}}S(z_0).$$

Si p est réel, compris entre ε_2 et $\varepsilon_2 + \frac{B}{\sin\varphi}$, on calculera successivement les nombres réels α, z_0, θ, u par les formules

$$\tan g\alpha = \frac{B}{A-p}, \qquad \varphi < \alpha < \frac{1}{2}(\pi + \varphi),$$

$$z_0 = -\cot\frac{\varphi}{4}\tan g\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\varphi}{4}\right) = -(\operatorname{ch}\theta),$$

$$\sqrt{z_0^2 - 1} = \frac{\delta\left|\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\varphi}{2}}\right|}{\sin\frac{\varphi}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varphi}{4}\right)} = \operatorname{sh}\theta;$$

$$u = \omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_3-\omega_1}{i\pi}\theta + \frac{\left|\sqrt{\sin\varphi}\right|\operatorname{sh}\theta}{2\left|\sqrt{B}\right|\cos^2\frac{\varphi}{4}}S(z_0).$$

Dans ces formules, δ désigne l'unité positive ou négative suivant que p' est négatif ou positif.

INTÉGRALES ELLIPTIQUES.

g_2 ET g_3 SONT DES NOMBRES *réels.*

$$Y = 4y^3 - g_2 y - g_3 = 4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3).$$

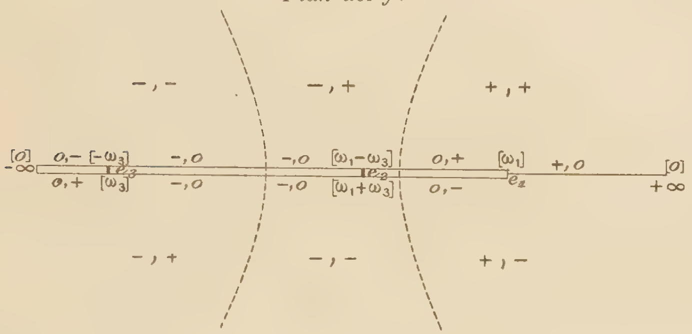
CXXX.

Cas où e_1, e_2, e_3 sont réels; $e_1 > e_2 > e_3$.

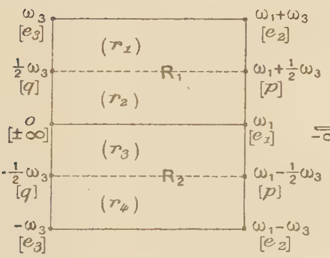
Cf (CXXIII), (CXXIV), (CXXIX_{1-2}) en supposant $e_1 = \varepsilon_1$, $e_2 = \varepsilon_2$, $e_3 = \varepsilon_3$, $g_2 = \gamma_2$, $g_3 = \gamma_3$, $k^2 = \varkappa$, ...

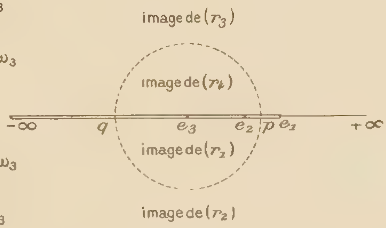
Fig. A.

Plan des y.



Plan des u. *Plan des y.*





Dans le plan des y, les valeurs entre crochets correspondent au plan des u; dans le plan des u elles correspondent au plan des y.

$$p = e_3 + k(e_1 - e_3); \qquad q = e_3 - k(e_1 - e_3).$$

$$\int_{-\infty}^{e_3} \frac{dy}{|\sqrt{Y}|} = \int_{e_2}^{e_1} \frac{dy}{|\sqrt{Y}|} = \frac{\omega_3}{i}; \qquad \int_{e_3}^{e_2} \frac{dy}{|\sqrt{Y}|} = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dy}{|\sqrt{Y}|} = \omega_1,$$

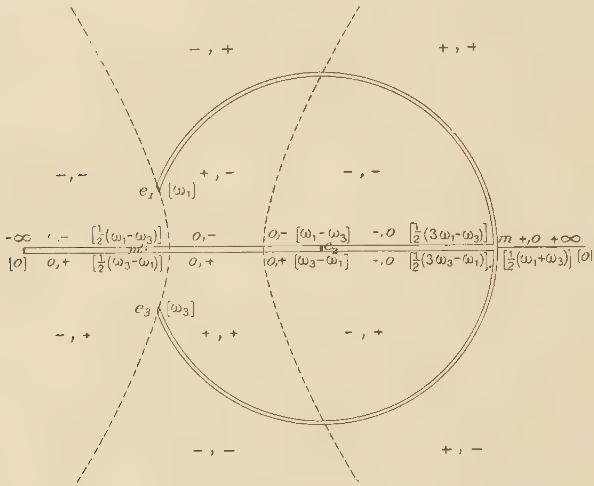
où ω_1, ω_3 sont formés au moyen de e_1, e_2, e_3 comme dans les formules (CXXIII), (CXXIV).

CXXXI.

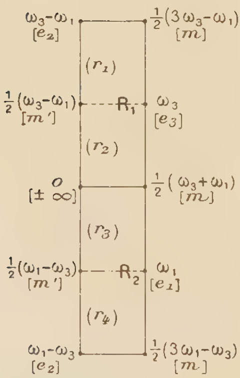
Cas où e_2 est réel; $\dfrac{e_1 - e_3}{i} > 0$.

Cf (CXXV), (CXXVI), (CXXIX$_{3-4}$), en supposant $e_1 = \varepsilon_1$, $e_2 = \varepsilon_2$, $e_3 = \varepsilon_3$, $g_2 = \gamma_2$, $g_3 = \gamma_3$, $k^2 = \varkappa$, ...

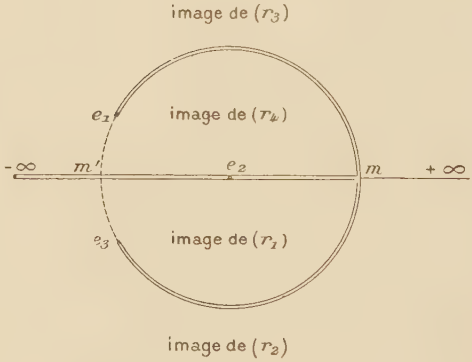
Fig. B.



Plan des u.



Plan des y.



Dans le plan des y les valeurs entre crochets correspondent au plan des u; dans le plan des u elles correspondent au plan des y.

CXXXI (suite).

$$m = e_2 + \frac{e_1 - e_3}{i} kk', \qquad m' = e_2 - \frac{e_1 - e_3}{i} kk'.$$

$$\int_{-\infty}^{e_3} \frac{dy}{|\sqrt{Y}|} = \frac{\omega_3 - \omega_1}{i}; \qquad \int_{e_2}^{m} \frac{dy}{|\sqrt{Y}|} = \int_{m}^{\infty} \frac{dy}{|\sqrt{Y}|} = \frac{\omega_3 + \omega_1}{2};$$

$$e_2 > 0, \quad \int_{e_3}^{e_1} \frac{dy}{-\sqrt{Y}} = \omega_2; \qquad e_2 < 0, \quad \int_{e_3}^{e_1} \frac{dy}{-\sqrt{Y}} = \omega_1 - \omega_3,$$

où ω_1, ω_3 sont formés au moyen de e_1, e_2, e_3 comme dans les formules (CXXV), (CXXVI).

CXXXII.

Substitutions linéaires.

(1).

$$Z = Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4Dz + E = A(z - z_\lambda)(z - z_\mu)(z - z_\nu)(z - z_\rho),$$

$$Y = 4y^3 - g_2 y - g_3 = 4(y - e_\alpha)(y - e_\beta)(y - e_\gamma),$$

$$g_2 = AE + 3C^2 - 4BD, \qquad g_3 = ACE + 2BCD - AD^2 - EB^2 - C^3,$$

$$z = z_\rho + \frac{\frac{1}{4} Z'_\rho}{y - \frac{1}{24} Z''_\rho}, \qquad y = \frac{1}{24} Z''_\rho + \frac{\frac{1}{4} Z'_\rho}{z - z_\rho}, \qquad \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{dy}{-\sqrt{Y}},$$

$$y - e_\alpha = \frac{A}{4}(z_\rho - z_\mu)(z_\rho - z_\nu)\frac{z - z_\lambda}{z - z_\rho}.$$

(2).

$$\sqrt{Y} = \frac{\frac{1}{4} Z'_\rho}{(z - z_\rho)^2}\sqrt{Z} = \frac{4}{Z'_\rho}\left(y - \tfrac{1}{24} Z''_\rho\right)^2 \sqrt{Z}.$$

(3) $A \neq 0$.

$$L = (z_1 - z_3)(z_2 - z_4), \quad M = (z_1 - z_2)(z_3 - z_4), \quad N = (z_1 - z_4)(z_2 - z_3), \quad L = M + N;$$

$$g_2 = \frac{A^2}{24}(L^2 + M^2 + N^2), \qquad g_3 = \frac{A^3}{432}(L + M)(L + N)(M - N);$$

$$e_\alpha = \frac{C}{2} - \frac{A}{4}(z_\lambda z_\rho + z_\mu z_\nu) = \frac{A}{12}\left[(z_\rho + z_\lambda)(z_\mu + z_\nu) - 2(z_\lambda z_\rho + z_\mu z_\nu)\right],$$

$$e_\beta - e_\gamma = \frac{A}{4}(z_\lambda - z_\rho)(z_\mu - z_\nu), \qquad e_\gamma - e_\alpha = \frac{A}{4}(z_\mu - z_\rho)(z_\nu - z_\lambda),$$

$$e_\alpha - e_\beta = \frac{A}{4}(z_\nu - z_\rho)(z_\lambda - z_\mu).$$

CXXXII (SUITE).

(4) $A = 0$.

$$Z = az^3 + 3bz^2 + 3cz + d = a(z - z_\mu)(z - z_\nu)(z - z_\rho),$$

$$g_2 = \frac{3}{4}(b^2 - ac), \qquad g_3 = \frac{1}{16}(3abc - a^2d - 2b^3),$$

$$e_\alpha = \frac{1}{24} Z''_\rho, \qquad e_\beta = \frac{1}{24} Z''_\nu, \qquad e_\gamma = \frac{1}{24} Z''_\mu,$$

$$e_\beta - e_\gamma = \frac{a}{4}(z_\nu - z_\mu), \qquad e_\gamma - e_\alpha = \frac{a}{4}(z_\mu - z_\rho), \qquad e_\alpha - e_\beta = \frac{a}{4}(z_\rho - z_\nu).$$

CXXXIII.

Cas où Z est du troisième degré et admet trois racines réelles

$$z_1 > z_2 > z_3.$$

$$a > 0; \qquad e_2 - e_3 = \frac{a}{4}(z_2 - z_3), \qquad e_1 - e_3 = \frac{a}{4}(z_1 - z_3),$$

$$e_1 - e_2 = \frac{a}{4}(z_1 - z_2), \qquad k^2 = \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}.$$

$$\int_{-\infty}^{z_3} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \int_{z_2}^{z_1} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3}{i}; \qquad \int_{z_3}^{z_2} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \int_{z_1}^{\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \omega_1,$$

où ω_1, ω_3 sont formés au moyen de e_1, e_2, e_3 comme dans les formules (CXXIII), (CXXIV).

CXXXIV.

$$Z = 4z(1 - z)(1 - nz).$$

$$n > 1; \quad 3e_1 = 2n - 1, \quad 3e_2 = 2 - n, \quad 3e_3 = -1 - n, \quad k^2 = \frac{1}{n},$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3}{i} = \frac{1}{|\sqrt{n}|}\,\mathrm{X}\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \int_{1}^{\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \omega_1 = \frac{1}{|\sqrt{n}|}\,\mathrm{X}\left(\frac{1}{n}\right);$$

CXXXIV (suite).

$1 > n > 0$; $3e_1 = 2 - n$, $3e_2 = 2n - 1$, $3e_3 = -1 - n$, $k^2 = n$,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \int_{1}^{\frac{1}{n}} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3}{i} = \mathrm{X}(1-n),$$

$$\int_{0}^{1} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \omega_1 = \mathrm{X}(n);$$

$n < 0$; $3e_1 = 1 - 2n$, $3e_2 = 1 + n$, $3e_3 = n - 2$, $k^2 = \dfrac{1}{1-n}$,

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{n}} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \int_{0}^{1} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3}{i} = \frac{1}{|\sqrt{1-n}|}\,\mathrm{X}\left(\frac{n}{n-1}\right),$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{0} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \int_{1}^{\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \omega_1 = \frac{1}{|\sqrt{1-n}|}\,\mathrm{X}\left(\frac{1}{1-n}\right).$$

$$Z = 4z(1+z)(1-nz).$$

$n > 0$; $3e_1 = n + 2$, $3e_2 = n - 1$, $3e_3 = -2n - 1$, $k^2 = \dfrac{n}{n+1}$,

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3}{i} = \frac{1}{|\sqrt{n+1}|}\,\mathrm{X}\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \omega_1 = \frac{1}{|\sqrt{n+1}|}\,\mathrm{X}\left(\frac{n}{n+1}\right);$$

$0 > n > -1$; $3e_1 = 1 - n$, $3e_2 = 1 + 2n$, $3e_3 = -2 - n$, $k^2 = 1 + n$,

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{n}} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \int_{-1}^{0} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3}{i} = \mathrm{X}(-n),$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{-1} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \int_{0}^{\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \omega_1 = \mathrm{X}(1+n);$$

CXXXIV (suite).

$n < -1;\quad 3e_1 = 1 - n,\quad 3e_2 = -2 - n,\quad 3e_3 = 1 + 2n,\quad k^2 = \dfrac{1+n}{n},$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = {}'\!\!\int_{\frac{1}{n}}^{0} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3}{i} = \frac{1}{|\sqrt{-n}|}\,\mathrm{x}\left(-\frac{1}{n}\right),$$

$$ {}'\!\!\int_{-1}^{\frac{1}{n}} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = {}'\!\!\int_{0}^{\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \omega_1 = \frac{1}{|\sqrt{-n}|}\,\mathrm{x}\left(\frac{1+n}{n}\right).$$

CXXXV.

$$Z = (1 + z^2)(1 - h^2 z^2).$$

$h > 0;\quad 3e_1 = h^2 + 2,\quad 3e_2 = h^2 - 1,\quad 3e_3 = -2h^2 - 1,\quad k^2 = \dfrac{h^2}{1+h^2},$

$$ {}'\!\!\int_{0}^{\frac{1}{h}} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3}{i} = \frac{1}{|\sqrt{1+h^2}|}\,\mathrm{K}',\qquad {}'\!\!\int_{\frac{1}{h}}^{\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \omega_1 = \frac{1}{|\sqrt{1+h^2}|}\,\mathrm{K}:$$

$$Z = (1 - z^2)(1 - h^2 z^2).$$

$1 > h > 0;\quad 3e_1 = 2 - h^2,\quad 3e_2 = 2h^2 - 1,\quad 3e_3 = -1 - h^2,\quad k^2 = h^2,$

$$ {}'\!\!\int_{0}^{1} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = {}'\!\!\int_{\frac{1}{h}}^{\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \omega_1 = \mathrm{K},\qquad {}'\!\!\int_{1}^{\frac{1}{h}} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3}{i} = \mathrm{K}',$$

$h > 1;\quad 3e_1 = 2h^2 - 1,\quad 3e_2 = 2 - h^2,\quad 3e_3 = -1 - h^2,\quad k^2 = \dfrac{1}{h^2},$

$$ {}'\!\!\int_{0}^{\frac{1}{h}} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = {}'\!\!\int_{1}^{\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \omega_1 = \frac{1}{h}\,\mathrm{K},\qquad {}'\!\!\int_{\frac{1}{h}}^{1} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3}{i} = \frac{1}{h}\,\mathrm{K}':$$

$$Z = (1 + z^2)(1 + h^2 z^2).$$

$1 > h > 0;\quad 3e_1 = 1 + h^2,\quad 3e_2 = 1 - 2h^2,\quad 3e_3 = h^2 - 2,\quad k^2 = 1 - h^2,$

$$ {}'\!\!\int_{0}^{\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \omega_1 = \mathrm{K};$$

$h > 1;\quad 3e_1 = 1 + h^2,\quad 3e_2 = h^2 - 2,\quad 3e_3 = 1 - 2h^2,\quad k^2 = \dfrac{h^2-1}{h^2},$

$$ {}'\!\!\int_{0}^{\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \omega_1 = \frac{1}{h}\,\mathrm{K}.$$

Dans tous les cas, on suppose $\mathrm{K} = \mathrm{x}(k^2)$, $\mathrm{K}' = \mathrm{x}(1 - k^2)$.

CXXXVI.

Cas où Z est du troisième degré et admet une seule racine réelle z_2.

$$\frac{z_1 - z_3}{i} > 0; \qquad a > 0.$$

$$e_2 = \frac{a}{12}(2z_2 - z_1 - z_3); \qquad e_2 - e_3 = \frac{a}{4}(z_2 - z_3);$$

$$e_1 - e_3 = \frac{a}{4}(z_1 - z_3); \qquad k^2 = \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}.$$

$$\text{M} = z_2 + \left| \sqrt{z_2 - z_1}\sqrt{z_2 - z_3} \right|.$$

$$'\!\!\int_{z_2}^{\text{M}} \frac{dz}{|\sqrt{\text{Z}}|} = '\!\!\int_{\text{M}}^{\infty} \frac{dz}{|\sqrt{\text{Z}}|} = \frac{\omega_3 + \omega_1}{2}; \qquad '\!\!\int_{-\infty}^{z_2} \frac{dz}{|\sqrt{\text{Z}}|} = \frac{\omega_3 - \omega_1}{i};$$

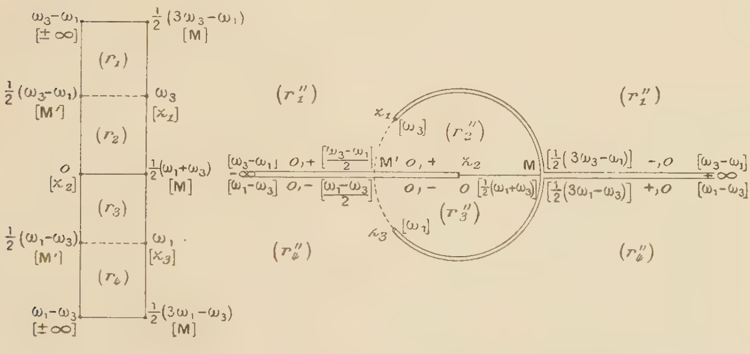
$$'\!\!\int_{z_3}^{\text{M}} \frac{dz}{\sqrt{\text{Z}}} = '\!\!\int_{z_3}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{\text{Z}}} = \frac{\omega_3 - \omega_1}{2};$$

$$z_2 > \frac{z_1 + z_3}{2}, \quad '\!\!\int_{z_3}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{\text{Z}}} = \omega_2; \qquad z_2 < \frac{z_1 + z_3}{2}, \quad '\!\!\int_{z_3}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{\text{Z}}} = \omega_3 - \omega_1,$$

où ω_1, ω_3 sont formés au moyen de e_1, e_2, e_3 comme dans les formules (CXXV), (CXXVI).

Fig. C.

Plan des u. *Plan des z.*



Dans le plan des z les valeurs entre crochets correspondent au plan des u; dans le plan des u elles correspondent au plan des z.

CXXXVII.

Cas où Z est du quatrième degré et admet quatre racines réelles
$$z_1 > z_2 > z_3 > z_4.$$

$$A > 0; \quad e_1 - e_3 = \tfrac{1}{4}AL, \quad e_1 - e_2 = \tfrac{1}{4}AM, \quad e_2 - e_3 = \tfrac{1}{4}AN, \quad k^2 = \frac{N}{L},$$

$$\int_{z_4}^{z_3} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \int_{z_2}^{z_1} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3}{i}; \quad \int_{z_3}^{z_2} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \int_{z_1}^{\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} + \int_{-\infty}^{z_4} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \omega_1.$$

$$A < 0; \quad e_3 - e_1 = \tfrac{1}{4}AL, \quad e_2 - e_1 = \tfrac{1}{4}AN, \quad e_3 - e_2 = \tfrac{1}{4}AM, \quad k^2 = \frac{M}{L},$$

$$\int_{z_4}^{z_3} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \int_{z_2}^{z_1} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \omega_1; \quad \int_{z_3}^{z_2} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \int_{z_1}^{\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} + \int_{-\infty}^{z_4} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3}{i}.$$

Dans ces formules et les suivantes (CXXVIII), ω_1, ω_3 sont formés au moyen de e_1, e_2, e_3 comme dans les formules (CXXIII), (CXXIV).

CXXXVIII.

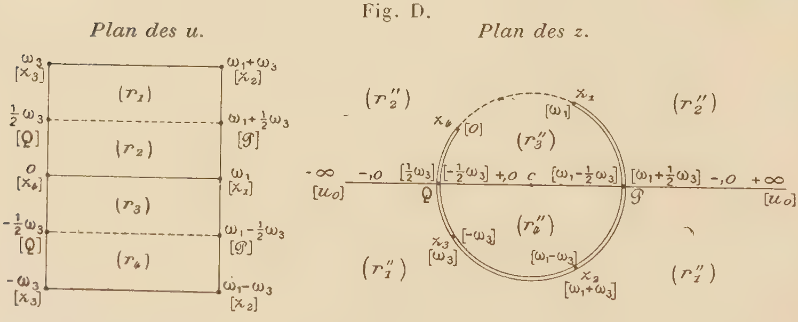
Cas où Z admet deux paires de racines imaginaires conjuguées.

$$\frac{z_1 - z_2}{i} > 0, \qquad \frac{z_4 - z_3}{i} > 0, \qquad z_1 + z_2 \geqq z_3 + z_4; \qquad A > 0.$$

$$e_1 - e_3 = \frac{1}{4}AL, \qquad e_1 - e_2 = \frac{1}{4}AM, \qquad e_2 - e_3 = \frac{1}{4}AN, \qquad k^2 = \frac{N}{L}.$$

(1).

Fig. D.



Dans le plan des z les valeurs entre crochets correspondent au plan des u; dans le plan des u elles correspondent au plan des z.

$$P = \frac{z_1 z_2 - z_3 z_4 + \left|\sqrt{(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)}\sqrt{(z_2 - z_4)(z_2 - z_3)}\right|}{z_1 + z_2 - z_3 - z_4},$$

$$Q = \frac{z_1 z_2 - z_3 z_4 - \left|\sqrt{(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)}\sqrt{(z_2 - z_4)(z_2 - z_3)}\right|}{z_1 + z_2 - z_3 - z_4}.$$

CXXXVIII (SUITE).

(1) [*suite*].

$$'\!\!\int_{Q}^{P}\frac{dz}{|\sqrt{Z}|}=\omega_1,\qquad '\!\!\int_{P}^{\infty}\frac{dz}{|\sqrt{Z}|}+'\!\!\int_{-\infty}^{Q}\frac{dz}{|\sqrt{Z}|}=\omega_1;$$

$$'\!\!\int_{z_4}^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{Z}}=\omega_1,\qquad '\!\!\int_{z_3}^{z_2}\frac{dz}{\sqrt{Z}}=\omega_1,\qquad '\!\!\int_{z_2}^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{Z}}=\omega_3,\qquad '\!\!\int_{z_3}^{z_4}\frac{dz}{\sqrt{Z}}=\omega_3.$$

Pour la détermination de $\sqrt{Z}$ dans ces intégrales, *voir* n° 604.

(2).

$$Z=z^4+2r^2(1-2\cos^2\theta)z^2+r^4=(z^2+2rz\cos\theta+r^2)(z^2-2rz\cos\theta+r^2),$$

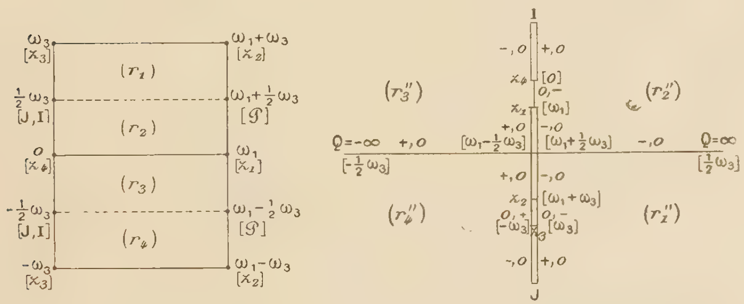
$$r>0,\qquad 0<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

$$'\!\!\int_{0}^{r}\frac{dz}{|\sqrt{Z}|}='\!\!\int_{r}^{\infty}\frac{dz}{|\sqrt{Z}|}=\frac{1}{2}\,\omega_1=\frac{1}{2r}\,\mathrm{X}(\cos^2\theta);\qquad \frac{\omega_3}{i}=\frac{1}{r}\,\mathrm{X}(\sin^2\theta).$$

(3).

Fig. E.

Plan des u. *Plan des z.*



Dans le plan des z les valeurs entre crochets correspondent au plan des u; dans le plan des u elles correspondent au plan des z.

Dans le plan des z, on a omis, pour ne pas charger la figure, d'écrire $P=\frac{1}{2}(z_1+z_2)=\frac{1}{2}(z_3+z_4)$, à l'intersection de l'axe des quantités réelles et de la coupure.

$$'\!\!\int_{-\infty}^{P}\frac{dz}{|\sqrt{Z}|}='\!\!\int_{P}^{+\infty}\frac{dz}{|\sqrt{Z}|}=\omega_1;\qquad '\!\!\int_{z_2}^{z_3}\frac{dz}{|\sqrt{Z}|}='\!\!\int_{z_1}^{z_4}\frac{dz}{|\sqrt{Z}|}=i\omega_1;$$

$$'\!\!\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{|\sqrt{Z}|}=2\,'\!\!\int_{z_1}^{P}\frac{dz}{|\sqrt{Z}|}=-\omega_3;\qquad \int_{z_3}^{I}\frac{dz}{|\sqrt{Z}|}='\!\!\int_{I}^{z_4}\frac{dz}{|\sqrt{Z}|}=-\frac{\omega_3}{2}.$$

CXXXIX.

Cas où Z admet deux racines réelles $z_2 > z_4$ et deux racines imaginaires conjuguées; $\dfrac{z_1 - z_3}{i} > 0$.

$$\delta = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - z_4|}; \quad s = \frac{1}{24} Z''_\rho;$$

$$e_2 = \frac{A}{24}\left[(z_1 - z_3)^2 - (z_1 + z_3 - 2z_2)(z_1 + z_3 - 2z_4)\right];$$

$$\frac{e_1 - e_3}{i} = \frac{|A|}{4i}(z_1 - z_3)(z_2 - z_4).$$

Dans les formules suivantes ω_1, ω_3 sont formés au moyen de e_1, e_2, e_3 comme dans les formules (CXXV), (CXXVI).

$A > 0$; $\qquad M = \dfrac{z_2 - z_4\delta}{1 - \delta}, \qquad M' = \dfrac{z_2 + z_4\delta}{1 + \delta},$

$\delta > 1$;
$$'\!\!\int_{M}^{z_4} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = {}'\!\!\int_{z_2}^{+\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} + {}'\!\!\int_{-\infty}^{M} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3 + \omega_1}{2},$$
$$'\!\!\int_{z_4}^{M'} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = {}'\!\!\int_{M'}^{z_2} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3 - \omega_1}{2i};$$

$\delta = 1$;
$$'\!\!\int_{-\infty}^{z_4} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = {}'\!\!\int_{z_2}^{+\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3 + \omega_1}{2},$$
$$'\!\!\int_{z_4}^{M'} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = {}'\!\!\int_{M'}^{z_2} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3 - \omega_1}{2i};$$

$\delta < 1$;
$$'\!\!\int_{z_2}^{M} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = {}'\!\!\int_{M}^{+\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} + {}'\!\!\int_{-\infty}^{z_4} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3 + \omega_1}{2},$$
$$\int_{z_4}^{M'} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = {}'\!\!\int_{M'}^{z_2} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3 - \omega_1}{2i};$$

$A < 0$; $\qquad M = \dfrac{z_2 + z_4\delta}{1 + \delta}, \qquad M' = \dfrac{z_2 - z_4\delta}{1 - \delta},$

$\delta > 1$;
$$'\!\!\int_{z_4}^{M} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = {}'\!\!\int_{M}^{z_2} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3 + \omega_1}{2},$$
$$'\!\!\int_{M'}^{z_4} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = {}'\!\!\int_{z_2}^{+\infty} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} + {}'\!\!\int_{-\infty}^{M'} \frac{dz}{|\sqrt{Z}|} = \frac{\omega_3 - \omega_1}{2i};$$

CXXXIX (SUITE).

$$\delta = 1; \qquad {}'\!\!\int_{z_4}^{\mathrm{M}} \frac{dz}{|\sqrt{\mathrm{Z}}|} = {}'\!\!\int_{\mathrm{M}}^{z_3} \frac{dz}{|\sqrt{\mathrm{Z}}|} = \frac{\omega_3 + \omega_1}{2},$$

$${}'\!\!\int_{-\infty}^{z_4} \frac{dz}{|\sqrt{\mathrm{Z}}|} = {}'\!\!\int_{z_2}^{+\infty} \frac{dz}{|\sqrt{\mathrm{Z}}|} = \frac{\omega_3 - \omega_1}{2i};$$

$$\delta < 1; \qquad {}'\!\!\int_{z_4}^{\mathrm{M}} \frac{dz}{|\sqrt{\mathrm{Z}}|} = {}'\!\!\int_{\mathrm{M}}^{z_3} \frac{dz}{|\sqrt{\mathrm{Z}}|} = \frac{\omega_3 + \omega_1}{2},$$

$${}'\!\!\int_{z_2}^{\mathrm{M}'} \frac{dz}{|\sqrt{\mathrm{Z}}|} = {}'\!\!\int_{\mathrm{M}'}^{+\infty} \frac{dz}{|\sqrt{\mathrm{Z}}|} + {}'\!\!\int_{-\infty}^{z_4} \frac{dz}{|\sqrt{\mathrm{Z}}|} = \frac{\omega_3 - \omega_1}{2i}.$$

CXL.

Substitutions quadratiques dans le cas où Z est du troisième degré et n'admet qu'une seule racine réelle, z_2.

$$\mathrm{Z} = a(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3); \qquad \frac{z_1 - z_3}{i} > 0;$$

$$\varphi(z) = z^2 - 2z_2 z + z_2(z_1 + z_3) - z_1 z_3 = (z - \zeta_1)(z - \zeta_3);$$

$$x = \frac{(z - z_1)(z - z_3)}{z - z_2}, \qquad \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}} = \frac{dx}{\sqrt{ax(x - x_1)(x - x_3)}},$$

$$\frac{\sqrt{ax(x - x_1)(x - x_3)}}{\sqrt{\mathrm{Z}}} = \frac{(z - \zeta_1)(z - \zeta_3)}{(z - z_2)^2},$$

$$(x - x_1)(x - x_3) = (x + z_1 + z_3)^2 - 4(z_1 z_3 + z_2 x);$$

$$x_1 = 2\zeta_1 - z_1 - z_3, \qquad x_3 = 2\zeta_3 - z_1 - z_3;$$

$$\zeta_1 > z_2 > \zeta_3, \qquad x_1 > 0 > x_3:$$

z	$-\infty$		ζ_3		z_2		ζ_1		$+\infty$
x	$-\infty$		x_3		$\mp\infty$		x_1		$+\infty$
Sgn $\varphi(z)$...		—		—		—		—	

$$\frac{dz}{|\sqrt{\mathrm{Z}}|} = \mp \frac{dx}{|\sqrt{ax(x - x_1)(x - x_3)}|},$$

où il faut prendre le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que z est dans l'intervalle $\zeta_3 \ldots \zeta_1$ ou hors de cet intervalle.

CXLI.

Substitutions quadratiques dans le cas où Z est du quatrième degré et admet soit une paire, soit deux paires, de racines imaginaires conjuguées.

$Z = A(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$; z_1, z_3 imaginaires conjuguées.

$$A_1 = A(z_1-z_3)^2;$$

$$\varphi(z) = (z_2+z_4-z_1-z_3)z^2 + 2(z_1z_3-z_2z_4)z + (z_1+z_3)z_2z_4 - (z_2+z_4)z_1z_3.$$

$$x = \frac{(z-z_2)(z-z_4)}{(z-z_1)(z-z_3)}, \qquad \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{dx}{\sqrt{A_1x(x-x_1)(x-x_3)}},$$

$$\frac{\sqrt{A_1x(x-x_1)(x-x_3)}}{\sqrt{Z}} = \frac{\varphi(z)}{(z-z_1)^2(z-z_3)^2}.$$

(1).

$$z_1+z_3 \lesseqgtr z_2+z_4,$$

$$\varphi(z) = (z_2+z_4-z_1-z_3)(z-\zeta_1)(z-\zeta_3),$$

$$(x-x_1)(x-x_3)(z_1-z_3)^2$$
$$= (z_1-z_3)^2x^2 + 2[2(z_1z_3+z_2z_4)-(z_1+z_3)(z_2+z_4)]\,x + (z_2-z_4)^2,$$

$$x_1 = \frac{2\zeta_1-z_2-z_4}{2\zeta_1-z_1-z_3}, \qquad x_3 = \frac{2\zeta_3-z_2-z_4}{2\zeta_3-z_1-z_3};$$

	$z_2+z_4>z_1+z_3$; $(\zeta_1<\zeta_3)$.						$z_2+z_4<z_1+z_3$; $\zeta_1>\zeta_3$.					
z......	$-\infty$	ζ_1	z_2	ζ_3	z_4	$+\infty$	$-\infty$	z_2	ζ_3	z_4	ζ_1	$+\infty$
x......	1	x_1	0	x_3	0	1	1	0	x_3	0	x_1	1
Sgn $\varphi(z)$.	+	−	−	+	+		−	−	+	+	−	

Lorsque z_2, z_4 sont imaginaires, on doit les effacer, dans ce Tableau, ainsi que les quantités o qui leur correspondent.

(2).

$$z_1+z_3 = z_2+z_4,$$

$$\varphi(z) = 2(z_1z_3-z_2z_4)\left(z-\frac{z_1+z_3}{2}\right),$$

	$z_2z_4<z_1z_3$.			$z_2z_4>z_1z_3$.		
z.......	$-\infty$	$\frac{z_1+z_3}{2}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{z_1+z_3}{2}$	$+\infty$
x.......	1	x_3	1	1	x_1	1
Sgn $\varphi(z)$..	−	+		+	−	

CXLI (SUITE).

(2) [*suite*].

$$z_2 z_4 < z_1 z_3, \qquad x_1 = 1, \qquad x_3 = \frac{(z_2 - z_4)^2}{(z_1 - z_3)^2};$$

$$z_2 z_4 > z_1 z_3, \qquad x_3 = 1, \qquad x_1 = \frac{(z_2 - z_4)^2}{(z_1 - z_3)^2}.$$

CXLII.

$$\int_0^1 \frac{dz}{|\sqrt{1 - z^4}|} = \int_1^\infty \frac{dz}{|\sqrt{z^4 - 1}|} = 1,311029$$

$$\int_0^1 \frac{dz}{|\sqrt{1 + z^4}|} = \int_1^\infty \frac{dz}{|\sqrt{1 + z^4}|} = 0,927038.$$

CXLIII.

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = R(z) = a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 + 4 a_3 z + a_4;$$

(1) $$\left\{ \begin{aligned} g_2 &= 3 a_2^2 - 4 a_1 a_3 + a_0 a_4, \\ g_3 &= 2 a_1 a_2 a_3 + a_0 a_2 a_4 - a_4 a_1^2 - a_2^3 - a_0 a_3^2; \end{aligned} \right.$$

(2) $$pv = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0}, \qquad p'v = \frac{2 a_1^3 - 3 a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3}{a_0 \sqrt{a_0}};$$

(3) $$z = \frac{1}{2\sqrt{a_0}} \frac{p'u - p'v}{pu - pv} - \frac{a_1}{a_0} = -\frac{1}{\sqrt{a_0}} [\zeta u + \zeta v - \zeta(u + v)] - \frac{a_1}{a_0};$$

(4) $$\frac{dz}{du} = -\frac{1}{\sqrt{a_0}} [2pu - a_0 z^2 - 2 a_1 z - a_2];$$

(5) $$\frac{1}{24} R''(z) = a_0 z^2 + 2 a_1 z + a_2 = pu + p(u + v).$$

Dans ces formules la détermination de $\sqrt{a_0}$ est fixée arbitrairement.

CXLIV.

$$(1) \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}} = c + u;$$

$$(2) \qquad \int \frac{z\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}} = c' - \left[\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{\sqrt{a_0}}\zeta(v)\right]u + \frac{1}{\sqrt{a_0}}\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u};$$

$$(3) \qquad a_0\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}} + 2a_1\int\frac{z\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}} = c'' - a_2 u - \zeta(u+v) - \zeta u;$$

$$(4) \qquad a_0\int\frac{z^3\,d}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}} + 3a_1\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}} + 3a_2\int\frac{z\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}} = c''' - a_3 u + \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{R}(z)};$$

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{J}_r = \int\frac{z^r\,dr}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}},\\ &a_0(r+2)\mathrm{J}_{r+3} + 2(2r+3)a_1\mathrm{J}_{r+2} + 6(r+1)a_2\mathrm{J}_{r+1}\\ &\qquad + 2(2r+1)a_3\mathrm{J}_r + ra_4\mathrm{J}_{r-1} = z^r\sqrt{\mathrm{R}(z)};\end{aligned}\right.$$

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} &z = \frac{1}{x}; \qquad \mathrm{R}_1(x) = a_4x^4 + 4a_3x^3 + 6a_2x^2 + 4a_1x + a_0;\\ &\sqrt{\mathrm{R}_1(x)} = x^2\sqrt{\mathrm{R}(z)};\\ &\int\frac{dz}{z^r\sqrt{\mathrm{R}(z)}} = -\int\frac{x^r\,dx}{\sqrt{\mathrm{R}_1(x)}}.\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, r est un nombre quelconque; c, c', c'', c''' désignent des constantes arbitraires.

CXLV.

$$(1) \qquad \frac{\partial e_\alpha}{\partial g_2} = \frac{e_\alpha}{12e_\alpha^2 - g_2}, \qquad \frac{\partial e_\alpha}{\partial g_3} = \frac{1}{12e_\alpha^2 - g_2}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3);$$

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(k^2)}{\partial g_2} = \frac{(2-k^2)(1-2k^2)(1+k^2)}{12k^2k'^2(e_1-e_3)^2} = \frac{9}{16}\frac{g_3}{\mathcal{G}}(e_1-e_3)k^2k'^2,\\ &\frac{\partial(k^2)}{\partial g_3} = \frac{k^4-k^2+1}{2k^2k'^2(e_1-e_3)^3} = -\frac{3}{8}\frac{g_2}{\mathcal{G}}(e_1-e_3)k^2k'^2;\end{aligned}\right.$$

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} &32\,\mathcal{G}\,\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial g_2} = 9g_3\eta_\alpha - \tfrac{1}{2}g_2^2\omega_\alpha, \qquad 64\,\mathcal{G}\,\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial g_2} = g_2^2\eta_\alpha - \tfrac{3}{2}g_2g_3\omega_\alpha,\\ &32\,\mathcal{G}\,\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial g_3} = 9g_3\omega_\alpha - 6g_2\eta_\alpha, \qquad 64\,\mathcal{G}\,\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial g_3} = g_2^2\omega_\alpha - 18g_3\eta_\alpha.\end{aligned}\right.$$

CXLV (SUITE).

$$
(4)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{dK}{d\kappa} = -\dfrac{1}{2\kappa}K + \dfrac{1}{2\kappa(1-\kappa)}E, & \dfrac{dK'}{d\kappa} = \dfrac{1}{2(1-\kappa)}K' - \dfrac{1}{2\kappa(1-\kappa)}E', \\[2ex]
\dfrac{dE}{d\kappa} = -\dfrac{1}{2\kappa}K + \dfrac{1}{2\kappa}E, & \dfrac{dE'}{d\kappa} = \dfrac{1}{2(1-\kappa)}K' - \dfrac{1}{2(1-\kappa)}E', \\[2ex]
\multicolumn{2}{c}{\dfrac{dZ'(0)}{d\kappa} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{[Z'(0)-\kappa]^2}{2\kappa(1-\kappa)}.}
\end{array}\right.
$$

Dans les formules (4-5), K désigne la fonction $\mathrm{X}(\kappa)$ de la variable κ.

$$
(5)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\kappa(\kappa-1)\dfrac{d^2K}{d\kappa^2} + (2\kappa-1)\dfrac{dK}{d\kappa} + \tfrac{1}{4}K = 0, & \kappa(\kappa-1)\dfrac{d^2K'}{d\kappa^2} + (2\kappa-1)\dfrac{dK'}{d\kappa} + \tfrac{1}{4}K' = 0, \\[2ex]
\kappa(1-\kappa)\dfrac{d^2E}{d\kappa^2} + (1-\kappa)\dfrac{dE}{d\kappa} + \tfrac{1}{4}E = 0, & \kappa(1-\kappa)\dfrac{d^2E'}{d\kappa^2} - \kappa\dfrac{dE'}{d\kappa} + \tfrac{1}{4}E' = 0.
\end{array}\right.
$$

$$
(6)\quad \left\{\begin{array}{ll}
j = \dfrac{g_2^3}{16\mathcal{G}}, & A = 2^{\frac{1}{3}}\omega_\alpha \mathcal{G}^{\frac{1}{12}}, \\[2ex]
B = 2^{-\frac{1}{3}}\mathcal{G}^{-\frac{1}{12}}\eta_\alpha, & C = \dfrac{B}{2\sqrt{3}}(j-1)^{-\frac{1}{2}}j^{-\frac{2}{3}}, \\[2ex]
\dfrac{\partial A}{\partial j} = -C, & \dfrac{\partial B}{\partial j} - \dfrac{A}{24\sqrt{3}}j^{-\frac{1}{3}}(j-1)^{-\frac{1}{2}}, \\[2ex]
\multicolumn{2}{c}{144j(j-1)\dfrac{\partial C}{\partial j} + 24C(7j-4) - A = 0;}
\end{array}\right.
$$

$$
(7)\quad \left\{\begin{array}{l}
144j(j-1)\dfrac{\partial^2 A}{\partial j^2} + 24(7j-4)\dfrac{\partial A}{\partial j} + A = 0, \\[2ex]
j(j-1)\dfrac{\partial^2 B}{\partial j^2} + \dfrac{5j-2}{6}\dfrac{\partial B}{\partial j} + \dfrac{1}{144}B = 0, \\[2ex]
144j(j-1)\dfrac{\partial^2 C}{\partial j^2} + 24(19j-10)\dfrac{\partial C}{\partial j} + 169C = 0.
\end{array}\right.
$$

CXLVI.

$$
(1)\quad \left\{\begin{array}{l}
16\mathcal{G}\dfrac{\partial\sigma}{\partial g_2} = -\tfrac{9}{4}g_3\sigma'' + \tfrac{1}{4}g_2^2u\sigma' - \left[\tfrac{1}{4}g_2 + \tfrac{3}{16}g_3u^2\right]g_2\sigma, \\[2ex]
16\mathcal{G}\dfrac{\partial\sigma}{\partial g_3} = \tfrac{3}{2}g_2\sigma'' - \tfrac{9}{2}g_3u\sigma' + \left[\tfrac{1}{8}g_2^2u^2 + \tfrac{9}{2}g_3\right]\sigma;
\end{array}\right.
$$

$$
(2)\quad \left\{\begin{array}{l}
16\mathcal{G}\dfrac{\partial\sigma_\alpha}{\partial g_2} = -\tfrac{9}{4}g_3\sigma_\alpha'' + \tfrac{1}{4}g_2^2u\sigma_\alpha' - \left[\tfrac{3}{16}g_2u^2 + \tfrac{9}{4}e_\alpha\right]g_3\sigma_\alpha, \\[2ex]
16\mathcal{G}\dfrac{\partial\sigma_\alpha}{\partial g_3} = \tfrac{3}{2}g_2\sigma_\alpha'' - \tfrac{9}{2}g_3u\sigma_\alpha' + \left[\tfrac{3}{2}e_\alpha + \tfrac{1}{8}g_2u^2\right]g_2\sigma_\alpha;
\end{array}\right.
$$

CXLVI (suite).

$$(3)\quad \begin{cases} 64\,\mathcal{G}\,\dfrac{\partial\zeta}{\partial g_2} = -g_2^2 u p + g_2^2 \zeta + 18 g_3 \zeta p + 9 p' g_3 - \frac{3}{2} g_2 g_3 u, \\ 64\,\mathcal{G}\,\dfrac{\partial\zeta}{\partial g_3} = 18 g_3 u p - 18 g_3 \zeta - 12 g_2 \zeta p - 6 g_2 p' + g_2^2 u; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} 64\,\mathcal{G}\,\dfrac{\partial p}{\partial g_2} = (g_2^2 u - 18 g_3 \zeta)\, p' + 6 g_2 g_3 + 2 g_2^2 p - 36 g_3 p^2, \\ 64\,\mathcal{G}\,\dfrac{\partial p}{\partial g_3} = (12 g_2 \zeta - 18 g_3 u)\, p' + 24 g_2 p^2 - 36 g_3 p - 4 g_2^2; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} 32\,\mathcal{G}\,\dfrac{\partial\xi_{0\alpha}}{\partial g_2} = [\tfrac{1}{2} g_2^2 u - 9 g_3 \zeta]\, \xi'_{0\alpha} - [\tfrac{1}{2} g_2^2 - 9 g_3 (e_\alpha + p)]\, \xi_{0\alpha}, \\ 32\,\mathcal{G}\,\dfrac{\partial\xi_{0\alpha}}{\partial g_3} = [-9 g_3 u + 6 g_2 \zeta]\, \xi'_{0\alpha} + [9 g_3 - 6 g_2 (e_\alpha + p)]\, \xi_{0\alpha}; \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} 32\,\mathcal{G}\,\dfrac{\partial\xi_{\alpha 0}}{\partial g_2} = [\tfrac{1}{2} g_2^2 u - 9 g_3 \zeta]\, \xi'_{\alpha 0} + [\tfrac{1}{2} g_2^2 - 9 g_3 (e_\alpha + p)]\, \xi_{\alpha 0}, \\ 32\,\mathcal{G}\,\dfrac{\partial\xi_{\alpha 0}}{\partial g_3} = [-9 g_3 u + 6 g_2 \zeta]\, \xi'_{\alpha 0} + [-9 g_3 + 6 g_2 (e_\alpha + p)]\, \xi_{\alpha 0}; \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} 32\,\mathcal{G}\,\dfrac{\partial\xi_{\beta\gamma}}{\partial g_2} = [\tfrac{1}{2} g_2^2 u - 9 g_3 \zeta]\, \xi'_{\beta\gamma} + 9 g_3 (e_\gamma - e_\beta)\, \xi_{\beta\gamma}, \\ 32\,\mathcal{G}\,\dfrac{\partial\xi_{\beta\gamma}}{\partial g_3} = [-9 g_3 u + 6 g_2 \zeta]\, \xi'_{\beta\gamma} + 6 g_2 (e_\beta - e_\gamma)\, \xi_{\beta\gamma}; \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} 2\varkappa(1-\varkappa)\,\dfrac{\partial\,\mathrm{sn}(u)}{\partial\varkappa} = \left[u\,\mathrm{Z}'(\mathrm{K}) - \dfrac{\Theta_1' u}{\Theta_1 u}\right] \mathrm{sn}' u, \\ 2\varkappa(1-\varkappa)\,\dfrac{\partial\,\mathrm{cn}(u)}{\partial\varkappa} = \left[u\,\mathrm{Z}'(\mathrm{K}) - \dfrac{\Theta_1' u}{\Theta_1 u}\right] \mathrm{cn}' u, \\ 2\varkappa(1-\varkappa)\,\dfrac{\partial\,\mathrm{dn}(u)}{\partial\varkappa} = \left[u\,\mathrm{Z}'(\mathrm{K}) - \dfrac{\mathrm{H}_1' u}{\mathrm{H}_1 u}\right] \mathrm{dn}' u; \end{cases}$$

$$(9)\quad \frac{\partial \mathrm{Z}(u)}{\partial\varkappa} = \frac{1}{2\varkappa(1-\varkappa)}\left[u\,\mathrm{Z}'(\mathrm{K})\,\mathrm{Z}'(u) - \varkappa\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{Z}(u) + \varkappa\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\right].$$

NOTE.

Détermination de la fonction inverse de pu au moyen des formules CXXVIII et CXXIX.

Reprenons toutes les notations et conventions du Tableau (CXXVIII), sauf celles qui concernent la détermination de $\sqrt{1-z_0^2}$, $\frac{1}{i}\log\left(z_0+i\sqrt{1-z_0^2}\right)$, que, dans cette Note, nous fixerons comme il suit :

Dans le plan de la variable z_0, du point o comme centre, avec un rayon égal à $\frac{1}{|\beta_0|}$, décrivons un cercle, et pratiquons à l'intérieur de ce cercle deux coupures allant respectivement des points $+1$, -1 aux points $\frac{1}{|\beta_0|}$, $-\frac{1}{|\beta_0|}$. Dans l'aire intérieure au cercle modifiée par ces coupures, regardons la fonction $\sqrt{1-z_0^2}$ comme ayant sa partie réelle positive, et la fonction $\frac{1}{i}\log\left(z_0+i\sqrt{1-z_0^2}\right)$ comme ayant sa partie réelle comprise entre $-\pi$ et π. Les valeurs respectives de ces fonctions, sur les bords des coupures, sont données par le Tableau suivant, où les radicaux et les logarithmes sont réels et positifs :

Coupure de gauche.

Bord supérieur...	$+i\sqrt{z_0^2-1}$,	$\pi-i\log\left(-z_0+\sqrt{z_0^2-1}\right)$,
Bord inférieur....	$-i\sqrt{z_0^2-1}$,	$\pi+i\log\left(-z_0+\sqrt{z_0^2-1}\right)$.

Coupure de droite.

Bord supérieur...	$-i\sqrt{z_0^2-1}$,	$-i\log\left(z_0+\sqrt{z_0^2-1}\right)$,
Bord inférieur....	$+i\sqrt{z_0^2-1}$,	$+i\log\left(z_0+\sqrt{z_0^2-1}\right)$.

Pour z_0 réel, compris entre -1 et $+1$, la fonction $\frac{1}{i}\log\left(z_0+i\sqrt{1-z_0^2}\right)$ coïncide avec la fonction $\arccos z$ définie comme étant comprise entre o

et π. Dans l'aire du cercle, modifiée par les coupures, cette fonction est holomorphe, ainsi que la fonction

$$\sqrt{1 - z_0^2}$$

et que la fonction

$$u = \frac{2\lambda(\beta_0^{\frac{1}{2}}) \log\left(z_0 + i\sqrt{1 - z_0^2}\right)}{i\rho\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\,(1+\chi)^2} + \frac{2\sqrt{1 - z_0^2}\,S_0}{\rho\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}\,(1+\chi)^2},$$

puisque S_0 est une série entière en z_0, convergente dans le cercle et sur sa circonférence. Nous désignerons par $F(z_0)$ le second membre de cette formule, où il est bien entendu que $\sqrt{1-z_0^2}$ et $\frac{1}{i}\log\left(z_0 + i\sqrt{1-z_0^2}\right)$ ont le sens qui vient d'être précisé. Si l'on regarde alors z_0 comme la fonction de p qui a été spécifiée dans le Tableau (CXXVIII), $u = F(z_0)$ devient une fonction de p que nous désignerons par $\mathfrak{a}py$, en posant $\text{p} = y$; cette fonction est parfaitement déterminée pourvu que la partie réelle de Π_0 ne soit pas nulle, et l'on a identiquement $p(\mathfrak{a}py) = y$.

Les trois équations concordantes

$$z_0 = \frac{1}{\beta_0}\,\frac{1 - \Pi_0}{1 + \Pi_0}, \quad y = pu, \quad u = F(z_0)$$

établissent une correspondance entre les trois variables z_0, y (ou p), z_0, correspondance qu'il est aisé d'approfondir dans les quatre cas du Tableau (CXXIX) (γ_2, γ_3 réels). Dans le premier de ces cas, la fonction $\mathfrak{a}py$ coïncide avec la fonction $\arg py$ définie au n° 591; il aurait été facile d'établir la coïncidence entre les fonctions $\mathfrak{a}py$ et $\arg py$ (n° 594) dans le troisième cas.

Quoi qu'il en soit, dans les quatre cas du Tableau (CXXIX), par les formules précédentes, au cercle et aux coupures du plan des z_0 correspondent, dans le plan des y, un système de coupures rectilignes ou circulaires qui passent par les points ε_1, ε_2, ε_3 et, dans le plan des u, le contour d'un rectangle égal en surface à la moitié d'un parallélogramme des périodes et symétrique tantôt par rapport à l'axe des quantités réelles, tantôt par rapport à l'axe des quantités purement imaginaires. Sur le contour de ce rectangle se trouve le point o qui correspond au point 1 du plan des z_0 et au point ∞ du plan des y. Aux points intérieurs de ce rectangle correspondent d'une façon univoque les points du plan des y non situés sur les coupures et les points du plan des z_0 qui sont intérieurs au cercle sans être situés sur les coupures. Quand le plan y comporte des coupures circulaires, elles sont situées sur le cercle de centre ε_2 qui passe par les points ε_1, ε_3.

Les figures schématiques qui suivent expriment, dans chacun des quatre cas, cette correspondance. Pour plus de clarté on a séparé les bords des coupures et l'on a entouré les points critiques d'arcs de cercle infiniment petits que l'on regardera comme continuant les bords des coupures. Dans le plan des z_0, au cercle infiniment petit décrit du point 1 comme centre,

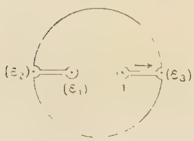
correspondent approximativement dans le plan des u un demi-cercle infiniment petit décrit du point o comme centre, et, dans le plan des y, un cercle de rayon infiniment grand, que l'on regardera comme embrassant tout le plan et dont on n'a figuré que l'amorce, vers $+\infty$, ou $-\infty$, suivant les cas. Dans les trois plans, les coupures et les arcs de cercle limitent des aires simplement connexes qui se correspondent point par point et où les fonctions $F(z_0)$, $\mathfrak{p}y$, pu sont respectivement holomorphes. Une flèche indique le sens dans lequel doit marcher un mobile partant du point 1, $\pm\infty$, o, suivant qu'il se meut dans le plan des z_0, des y, ou des u, pour suivre dans le sens *direct* le contour qui limite l'aire considérée sans jamais traverser une coupure; dans ce mouvement les trois mobiles se *correspondent*. On n'aura dès lors aucune peine à distinguer la correspondance entre les bords supérieurs et inférieurs, extérieurs ou intérieurs, des diverses coupures des plans des z_0 ou des y et des diverses portions du contour du rectangle du plan des u. Au reste, sauf pour le point 1 du plan des z_0, on a employé, pour désigner les points remarquables de la figure relative à ce plan, les mêmes lettres, placées entre parenthèses, que pour le plan correspondant du plan des y; on a répété ces mêmes lettres placées entre crochets, à côté des points correspondants du plan des u.

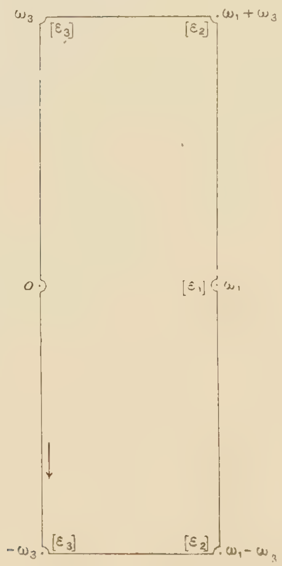
(I) $\quad \mathcal{G} > 0; \quad \varepsilon_1 > 0 \geqq \varepsilon_2 > \varepsilon_3; \quad \gamma_2 > 0, \quad \gamma_3 \geqq 0.$

[*Voir* CXXIII et CXXVIII, cas I.]

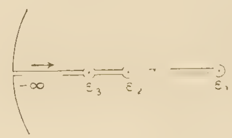
Plan des u.

Plan des z_0.





Plan des y.



$$u = \omega_1 t + \omega_3 t'; \qquad 0 < t < 1, \qquad -1 < t' < 1.$$

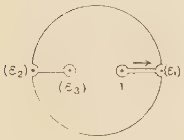
$$(\varepsilon_1) = -1; \qquad (\varepsilon_2) = -\frac{1}{\beta}; \qquad (\varepsilon_3) = \frac{1}{\beta}.$$

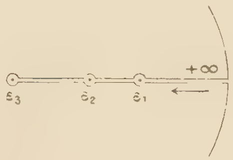
t' est de signe contraire aux coefficients de i dans y et dans z_0. A deux points y dont les affixes sont conjuguées correspondent deux points z_0, ou deux points u, symétriques par rapport aux axes des quantités réelles. Au cercle du plan des y décrit de ε_1 comme centre avec un rayon $k'(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$, cercle par rapport auquel les deux points ε_2 et ε_3 sont symétriques (n° 559), correspondent dans le plan des z, le diamètre qui va du point $-\dfrac{i}{\beta}$ au point $\dfrac{i}{\beta}$, et, dans le plan des u, le segment qui va de $\dfrac{\omega_1}{2} + \omega_3$ à $\dfrac{\omega_1}{2} - \omega_3$. Au segment indéfini du plan des y qui va de ε_1 à $+\infty$ correspondent, dans le plan des z, le segment qui va de (ε_1) à $+1$, et, dans le plan des u, le segment qui va de 0 à ω_1.

(2) $\mathcal{G} > 0; \qquad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \geqq 0 > \varepsilon_3; \qquad \gamma_2 > 0, \quad \gamma_2 \leqq 0.$

[*Voir* CXXIV et CXXVIII, cas V.]

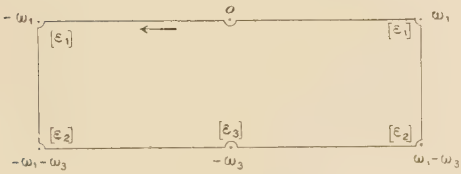
Plan des z_0. *Plan des y.*





$$(\varepsilon_1) = \frac{1}{\beta_0}; \qquad (\varepsilon_2) = -\frac{1}{\beta_0}; \qquad \varepsilon_3 = -1.$$

Plan des u.



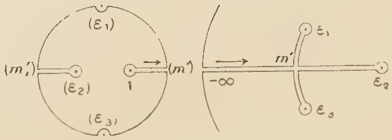
$$u = \omega_1 t - \omega_3 t'; \qquad -1 < t < 1, \quad 0 < t' < 1.$$

t a le signe du coefficient de i dans y et le signe contraire au coefficient de i dans z_0. A deux points y dont les affixes sont conjuguées correspondent deux points z_0 d'affixes conjuguées et deux points u symétriques par rapport à l'axe des quantités purement imaginaires. Au cercle du plan des y décrit de ε_3 comme centre et par rapport auquel les deux points ε_1, ε_2 sont symétriques, correspond, dans le plan des z_0, le diamètre qui va du point $\frac{i}{\beta_0}$ au point $-\frac{i}{\beta_0}$, et, dans le plan des u, le segment qui va de $-\omega_1 - \frac{\omega_3}{2}$ à $\omega_1 - \frac{\omega_3}{2}$. Au segment indéfini du plan des y qui va de $-\infty$ à ε_3 correspond, dans le plan des z_0, le segment qui va de 1 à (ε_3), et, dans le plan des u, le segment qui va de 0 à $-\omega_3$.

(3) $$\mathcal{G} < 0; \qquad \gamma_3 \geqq 0.$$

[*Voir* CXXVI et CXXVIII, cas IV.]

Plan des z_0. *Plan des y.*

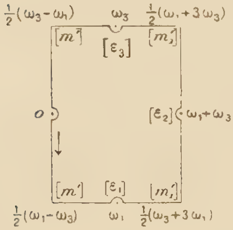


$$\beta_0 = i \operatorname{tang}\frac{\psi}{4}, \qquad m' = \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2i\sin\psi},$$

$$(m') = \cot\frac{\psi}{4}, \qquad (m'_1) = -\cot\frac{\psi}{4},$$

$$(\varepsilon_1) = i\cot\frac{\psi}{4}, \qquad (\varepsilon_3) = -i\cot\frac{\psi}{4}.$$

Plan des u.



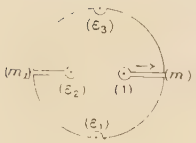
$$u = (\omega_1 + \omega_3)\,t + \frac{1}{2}(\omega_3 - \omega_1)\,t'; \qquad 0 \leqq t \leqq 1, \quad -1 \leqq t' \leqq 1.$$

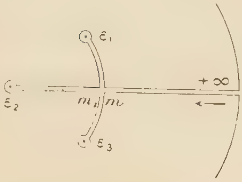
t' est de signe contraire aux coefficients de i dans y et dans z_0. A deux points y dont les affixes sont conjuguées correspondent deux points z_0 ou deux points u symétriques par rapport aux axes des quantités réelles. A deux points y de même affixe, mais situés sur les deux bords d'une coupure circulaire allant de m' à ε_1 ou à ε_3, correspondent deux points z_0 symétriques par rapport à l'axe des quantités purement imaginaires et deux points u symétriques par rapport à ω_1 ou à ω_3. A la partie non figurée du cercle du plan des y, de centre ε_2, qui va de ε_1 à ε_3, correspond, dans le plan des z_0, le diamètre qui va de (ε_1) à (ε_3), et, dans le plan des u, le segment qui va de ω_1 à ω_3. Au segment indéfini du plan des y, qui va de ε_2 à $+\infty$, correspond, dans le plan des z_0, le segment qui va de (ε_2) à 1, et, dans le plan des u, le segment qui va de $\omega_1 + \omega_3$ à o.

(4) $\qquad \mathcal{G} < 0; \qquad \gamma_3 \leqq 0.$

[*Voir* CXXVI et CXXVIII, cas IV.]

Plan des z_0. *Plan des y.*



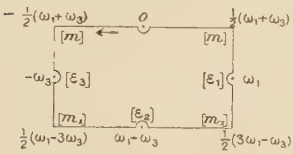


$$\beta_0 = i \operatorname{tang} \frac{\varphi}{4}, \qquad m = \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2 i \sin \varphi},$$

$$(m) = \cot \frac{\varphi}{4}, \qquad (m_1) = -\cot \frac{\varphi}{4},$$

$$(\varepsilon_1) = -i \cot \frac{\varphi}{4}, \qquad (\varepsilon_3) = i \cot \frac{\varphi}{4}, \qquad (\varepsilon_2) = -1.$$

Plan des u.



$$u = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_3)\, t + (\omega_1 - \omega_3)\, t'; \qquad -1 < t < 1, \quad 0 < t' < 1.$$

t est de même signe que le coefficient de i dans y et de signe contraire au coefficient de i dans z_0. A deux points y, d'affixes conjuguées, correspondent deux points z_0 symétriques par rapport à l'axe des quantités réelles et deux points u symétriques par rapport à l'une des quantités purement imaginaires. A deux points y de même affixe, mais situés sur les bords opposés de la coupure circulaire allant de m à ε_1 ou à ε_3, correspondent deux points z_0 symétriques par rapport à l'axe des quantités purement imaginaires et deux points u symétriques par rapport à ω_1 ou à $-\omega_3$. A la partie non figurée du cercle décrit de ε_2 comme centre dans le plan des y, allant de ε_1 à ε_3, correspond, dans le plan des z_0, le diamètre qui va de (ε_1) à (ε_3), et, dans le plan des u, le segment qui va de ω_1 à $-\omega_3$. Au segment indéfini du plan des y qui va de $-\infty$ à ε_2 correspond, dans le plan des z_0, le segment qui va de 1 à (ε_2), et, dans le plan des u, le segment qui va de o à $\omega_1 - \omega_3$.

Le lecteur trouvera dans le texte, au Chapitre IX, tout ce qu'il faut pour établir ces divers résultats qu'on a cru pouvoir ici se contenter d'énoncer. Il observera aussi que, dans les quatre cas, la fonction $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$ assujettie à être positive pour un point d'affixe très grande et supposée, s'il y a une telle coupure, sur le bord *supérieur* de la coupure rectiligne qui va vers $+\infty$, est holomorphe dans le plan des y limité par les coupures indiquées. Dans ces conditions on a, en deux points correspondants,

$$\wp' u = -\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3},$$

et, en supposant que le chemin d'intégration ne traverse aucune coupure,

$$\mathfrak{a}\wp y_1 - \mathfrak{a}\wp y_0 = \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{-\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}.$$

PREMIÈRES APPLICATIONS
DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE I.

PREMIÈRES APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE ET A LA MÉCANIQUE.

§ I. — Longueur d'un arc d'ellipse.

647. Soient a et b les demi-axes de l'ellipse; supposons $a > b$. Nous prendrons, pour origine des arcs s de l'ellipse, l'une des extrémités de son petit axe et nous orienterons l'ellipse à partir de cette extrémité dans un sens déterminé arbitrairement choisi. Si l'on met les équations de l'ellipse sous la forme

$$x = a \operatorname{sn} u, \qquad y = b \operatorname{cn} u,$$

en se réservant de choisir convenablement le module k, et si l'on fait varier le paramètre u de o à K, on obtient la longueur l du quart de l'ellipse. Soit s la longueur de l'arc de l'ellipse correspondant à une valeur de u comprise entre o et K; si l'on désigne par ds la différentielle de cet arc, les formules (LXVIII), (LXIX) donnent la relation

$$ds^2 = (a^2 \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u + b^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u)\, du^2 = a^2 \operatorname{dn}^2 u \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \operatorname{sn}^2 u\right) du^2,$$

que l'on peut écrire, en prenant pour le module k l'*excentricité* de l'ellipse,

$$ds^2 = a^2 \operatorname{dn}^2 u (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u)\, du^2 = a^2 \operatorname{dn}^4 u\, du^2;$$

on a donc

$$s = a\int_0^u \mathrm{dn}^2 u\,du, \qquad l = a\int_0^{\mathrm{K}} \mathrm{dn}^2 u\,du.$$

La valeur de la dernière intégrale se lit immédiatement sur la formule (CII_8); on a donc

$$\frac{l}{a} = \mathrm{E}.$$

La valeur de s résulte, dans tous les cas, de la formule (CXV_4), d'après laquelle

$$\int_0^u \mathrm{dn}^2 u\,du = \int_0^u (1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u)\,du = u - k^2\left[\frac{u}{k^2}\,\mathrm{Z}'(0) - \frac{1}{k^2}\,\frac{\Theta' u}{\Theta u}\right];$$

on en déduit immédiatement, en tenant compte de la formule (LXXIX_1), la relation

$$\frac{s}{a} = u[1 - \mathrm{Z}'(0)] + \mathrm{Z}(u),$$

que l'on peut aussi écrire ($\mathrm{CII}_{1,5}$)

$$\frac{s}{a} = \mathrm{E}(u).$$

C'est ce problème de la rectification d'un arc d'ellipse qui a servi de point de départ aux recherches de Legendre sur les fonctions elliptiques; le nom même de fonctions *elliptiques,* d'abord employé pour désigner les intégrales elliptiques, en tire son origine.

648. Pour effectuer un calcul numérique déterminé on prendra

$$e_1 = \frac{a^2 + b^2}{3a^2}, \qquad e_2 = \frac{a^2 - 2b^2}{3a^2}, \qquad e_3 = \frac{b^2 - 2a^2}{3a^2},$$

de façon que $k^2 = \dfrac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ soit bien égal à $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$; on aura alors (LXXI_1, CII_1),

$$\mathrm{K} = \omega_1, \qquad \mathrm{Z}'(0) = \frac{1 + k^2}{3} - \frac{\eta_1}{\omega_1} = 1 - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}},$$

et l'expression de s pourra être mise sous la forme (CII_7), ($\mathrm{LXXVIII}_4$),

$$\frac{s}{a} = u\left(\frac{a^2 + b^2}{3a^2} + \frac{\eta_1}{\omega_1}\right) + \frac{1}{2\omega_1}\,\frac{\vartheta_4'\left(\dfrac{u}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_4\left(\dfrac{u}{2\omega_1}\right)},$$

qui convient au calcul. On fera usage des Tableaux (CXXIII) ou (CXXIV), suivant que a^2 est plus grand ou plus petit que $2b^2$. Pour k^2 petit, on a, en négligeant k^4,

$$\frac{s}{a} = u - \frac{1}{2} k^2 \left(u - \frac{1}{2} \sin 2u\right).$$

§ II. — Longueur d'un arc de lemniscate.

649. L'équation de la lemniscate rapportée à son point double comme pôle et à son axe comme axe polaire est, comme on sait,

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta;$$

on en déduit immédiatement pour la longueur ds de l'arc élémentaire de cette courbe, la relation

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 = a^2 \frac{d\theta^2}{1 - 2\sin^2\theta} = \frac{a^2}{2} \frac{d\psi^2}{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi},$$

en posant

$$r = a\cos\psi, \qquad \sqrt{2}\sin\theta = \sin\psi.$$

Convenons de prendre tous les radicaux avec leur détermination arithmétique; convenons aussi de prendre $s = 0$ et $\psi = 0$ pour $\theta = 0$; on a alors pour la longueur l du quart de la lemniscate et pour la longueur s d'un arc quelconque de la lemniscate plus petit que l, compté à partir de l'extrémité de son axe, les formules

$$l = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi}}, \qquad s = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi}};$$

on a, de même, pour la longueur $l - s$ d'un arc quelconque plus petit que l et compté à partir du point double, les formules

$$l - s = a^2 \int_0^{r} \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}} = a \int_{\infty}^{\rho} \frac{d\rho}{-\sqrt{4\rho^3 - 4\rho}},$$

où l'on a posé

$$\rho = \frac{a^2}{r^2} = \frac{1}{\cos^2\psi} = \frac{1}{\cos 2\theta}.$$

De ces formules on déduit, pour

$$e_1 = 1, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = -1, \quad g_2 = 4, \quad g_3 = 0, \quad k^2 = \tfrac{1}{2},$$

les relations

$$\psi = \operatorname{am}\left(\frac{1}{a}\sqrt{2}\,s\right), \quad \sin\psi = \operatorname{sn}\left(\frac{1}{a}\sqrt{2}\,s\right), \quad r = \operatorname{cn}\left(\frac{1}{a}\sqrt{2}\,s\right), \quad \rho = p\left(\frac{l-s}{a}\right).$$

§ III. — Aire de l'ellipsoïde.

650. Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > b > c > 0,$$

l'équation de l'ellipsoïde rapportée à ses axes. Groupons les points de la surface où la normale fait un même angle avec l'axe des z; à cet effet, posons

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = v;$$

on voit immédiatement que tous les points envisagés se projettent orthogonalement, sur le plan des xy, suivant une ellipse de demi-axes,

$$a\sqrt{\frac{v^2-1+\dfrac{c^2}{a^2}}{v^2-1}}, \qquad b\sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-1+\dfrac{c^2}{b^2}}}.$$

L'aire intérieure à cette ellipse est égale à

$$\pi a b \mathrm{A},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\mathrm{A} = \frac{v^2-1}{\sqrt{\left(v^2-1+\dfrac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\dfrac{c^2}{b^2}\right)}};$$

donc l'aire de l'anneau elliptique compris entre les deux ellipses qui correspondent à v et à $v+dv$, est égale à

$$\pi a b \frac{d\mathrm{A}}{dv}\,dv;$$

l'aire de la partie de la surface du demi-ellipsoïde qui se projette orthogonalement sur le plan des xy suivant cet anneau est, par suite, égale à

$$\pi a b v \frac{d\mathrm{A}}{dv}\,dv;$$

donc enfin l'aire S du demi-ellipsoïde est égale à

$$S = \pi a b \int_{v=1}^{v=\infty} v \frac{dA}{dv} dv.$$

651. Pour effectuer l'intégration, posons

$$v = \xi_{\lambda 0}(u);$$

alors à la limite $v = \infty$ correspond la valeur $u = 0$; nous spécifierons tout à l'heure la valeur u_1 qui correspond à la limite d'intégration $v = 1$. Si nous choisissons e_λ, e_μ, e_ν de façon que l'on ait

$$e_\mu - e_\lambda = 1 - \frac{c^2}{a^2}, \qquad e_\nu - e_\lambda = 1 - \frac{c^2}{b^2},$$

on devra prendre $\mu = 1$, $\nu = 2$, $\lambda = 3$ pour avoir $e_1 > e_2 > e_3$. Dans ces conditions, on aura

$$3e_1 = 1 + \frac{c^2}{b^2} - \frac{2c^2}{a^2}, \qquad e_1 - e_2 = \frac{c^2}{b^2} - \frac{c^2}{a^2},$$

$$3e_2 = 1 + \frac{c^2}{a^2} - \frac{2c^2}{b^2}, \qquad e_2 - e_3 = 1 - \frac{c^2}{b^2},$$

$$3e_3 = -2 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}, \qquad e_1 - e_3 = 1 - \frac{c^2}{a^2}.$$

Quand u varie de 0 à ω_1, $\xi_{30}(u)$ varie de $+\infty$ à $\sqrt{e_1 - e_3} < 1$; on prendra pour u_1 la valeur de u comprise entre 0 et 1 pour laquelle on a

$$p u_1 - e_3 = 1, \qquad p u_1 - e_1 = \frac{c^2}{a^2}, \qquad p u_1 - e_2 = \frac{c^2}{b^2}, \qquad p' u_1 = -\frac{2c^2}{ab},$$

valeur pour laquelle $v = \xi_{30}(u)$ est effectivement égal à $+1$.

On a d'ailleurs

$$\int v \frac{dA}{dv} dv = A v - \int A \, dv;$$

en faisant dans l'intégrale indéfinie $\int A \, dv$ la substitution $v = \xi_{30}(u)$, on trouve de suite

$$A = [\xi_{30}^2(u) - 1]\, \xi_{01}(u)\, \xi_{02}(u), \qquad dv = -\xi_{10}(u)\, \xi_{20}(u),$$

$$\int A \, dv = \int (e_3 + 1 - p u)\, du = (e_3 + 1)\, u + \zeta u + \text{const.}$$

On aura donc

$$\int_{v=1}^{v=\infty} v \frac{dA}{dv} dv = [(\xi_{30}^2(u) - 1)\xi_{01}(u)\xi_{02}(u)\xi_{30}(u) - e_3 u - u - \zeta u]_{u_1}^{0};$$

la quantité entre crochets est une fonction impaire de u; si l'on développe suivant les puissances ascendantes de u, on reconnaît de suite que les termes en $\frac{1}{u}$ disparaissent, en sorte que cette fonction est nulle pour $u = 0$; d'autre part, $\xi_{30}^2(u_1)$ ou $pu_1 - e_3$ est égal à 1; on a donc finalement

$$S = \pi ab[u_1 pu_1 + \zeta u_1].$$

§ IV. — Pendule simple.

652. Considérons un point pesant, de masse égale à 1, assujetti à se mouvoir sur un cercle de centre O, de rayon l, situé dans un plan vertical. Si l'on rapporte, à un instant quelconque t, la position de ce point à deux axes Ox, Oz, dont le premier est horizontal dans le plan du cercle, le second dirigé suivant la nadirale, on a immédiatement les relations

$$x^2 + z^2 = l^2, \qquad v^2 = \frac{dx^2 + dz^2}{dt^2} = 2gz + h,$$

dont la seconde exprime l'intégrale des forces vives; v désigne la vitesse du mobile à l'instant t, g l'accélération de la pesanteur et h la constante des forces vives. On en déduit sans peine que z vérifie l'équation différentielle

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (l^2 - z^2)(2gz + h),$$

où les racines du second membre sont en évidence. En affectant de l'indice 0 les valeurs des variables à l'époque $t = 0$, on a

$$-\frac{h}{2g} = z_0 - \frac{v_0^2}{2g}.$$

La racine $-\frac{h}{2g}$ du second membre de l'équation différentielle, toujours inférieure à l, peut être comprise entre l et $-l$ ou être

plus petite que $-l$; puisque $2gz_0+h$ est positif, z, dans le premier cas, oscille entre l et $-\frac{h}{2g}$: le mouvement est alors, comme on sait, *oscillatoire;* dans le second cas, z est compris entre l et $-l$: le mouvement est *tournant*. Nous excluons le cas où, h étant égal à $2gl$, l'intégration peut s'effectuer par les fonctions élémentaires; dans les autres cas, z peut toujours atteindre la valeur l, et nous conviendrons de prendre l'origine du temps à un instant où z est égal à l.

653. Pour ramener l'équation différentielle à la forme normale nous ferons la substitution

$$z = -\frac{2l^2}{g}\mathrm{z} - \frac{h}{6g};$$

elle prend alors la forme

$$\left(\frac{d\mathrm{z}}{dt}\right)^2 = 4(\mathrm{z}-e_1)(\mathrm{z}-e_2)(\mathrm{z}-e_3);$$

les racines e_1, e_2, e_3, supposées telles que l'on ait $e_1 > e_2 > e_3$, correspondent aux quantités $-l$, $-\frac{h}{2g}$, l rangées par ordre de grandeur croissante, puisque z et z varient en sens contraire; dans tous les cas l correspond donc à e_3. L'intégrale de l'équation différentielle est

$$\mathrm{z} = p(t+\lambda),$$

en désignant par λ la constante d'intégration; pour $t=0$, z doit être égal à l et z à e_3; λ doit donc être congru à ω_3, *modulis* $2\omega_1$, $2\omega_3$; rien n'empêche de supposer $\lambda=\omega_3$, ce que nous ferons désormais.

Pour aller plus loin, il convient de distinguer les deux cas.

1° *Mouvement oscillatoire.* — On suppose

$$-l < \frac{h}{2g} < l;$$

on a alors

$$e_1 = \frac{g}{2l^2}\left(l-\frac{h}{6g}\right),\quad e_2 = \frac{h}{6l^2},\quad e_3 = -\frac{g}{2l^2}\left(l+\frac{h}{6g}\right),\quad k^2 = \frac{1}{2l}\left(l+\frac{h}{2g}\right),$$

puis, en se rappelant que z est égal à $p(t+\omega_3)$, en utilisant les

formules (LIX), (LX), (LXI) et en posant pour abréger $u = t\sqrt{\frac{g}{l}}$,

$$l - z = \frac{2l^2}{g}[p(t+\omega_3) - e_3] = \frac{g}{l}\left(l + \frac{h}{2g}\right)\xi_{03}^2 t = 2lk^2 \operatorname{sn}^2 u,$$

$$l + z = -\frac{2l^2}{g}[p(t+\omega_3) - e_1] = 2l\xi_{23}^2 t = 2l \operatorname{dn}^2 u,$$

$$z + \frac{h}{2g} = -\frac{2l^2}{g}[p(t+\omega_3) - e_2] = \left(l + \frac{h}{2g}\right)\xi_{13}^2 t = 2lk^2 \operatorname{cn}^2 u,$$

$$x = \sqrt{l^2 - z^2} = \sqrt{2gl + h}\,\xi_{03} t\,\xi_{23} t = 2lk \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$

$$v^2 = 2gz + h = 4k^2 gl \operatorname{cn}^2 u, \qquad v = 2k\sqrt{gl}\operatorname{cn} u;$$

pour déterminer le signe de la valeur de x, on a fixé le sens des x positifs de façon que v_0 soit positif; k est la racine carrée positive de k^2.

Si l'on désigne par θ l'angle que la tige du pendule fait avec la nadirale, en sorte que x soit égal à $l\sin\theta$ et z à $l\cos\theta$, les formules précédentes fournissent immédiatement celles-ci :

$$\sin\frac{\theta}{2} = k \operatorname{sn} u, \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \operatorname{dn} u, \qquad u = t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

sur lesquelles le caractère oscillatoire et les propriétés de symétrie du mouvement se lisent si facilement qu'il nous paraît inutile d'y insister; notons seulement que les positions les plus basses du mobile ($z = l$) correspondent aux instants

$$t = 2n\mathrm{K}\sqrt{\frac{l}{g}},$$

que les positions les plus hautes $\left(z = -\frac{h}{2l}\right)$ correspondent aux instants

$$t = (2n+1)\mathrm{K}\sqrt{\frac{l}{g}},$$

en désignant par n un nombre entier, que la durée d'une oscillation complète est

$$\mathrm{T} = 2\mathrm{K}\sqrt{\frac{l}{g}},$$

que l'angle entre la nadirale et la tige du pendule dans sa position

la plus haute n'est autre que la valeur α de θ pour $u = \mathrm{K}$; on a donc (LXXII)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = k, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = k'.$$

Pour les applications numériques on utilisera les formules (CXXIII) ou (CXXIV) suivant que h est négatif ou positif. Si h est très voisin de $-2gl$ ou de $+2gl$, on pourra se servir des formules (CXXII_{10}) ou (CXXII_{11}).

2° *Mouvement tournant.* — On suppose

$$-\frac{h}{2g} < -l < l;$$

on a alors

$$e_1 = \frac{h}{6l^2}, \quad e_2 = \frac{g}{2l^2}\left(l - \frac{h}{6g}\right), \quad e_3 = -\frac{g}{2l^2}\left(l + \frac{h}{6g}\right), \quad \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2l}\left(l + \frac{h}{2g}\right),$$

puis, en posant cette fois

$$u = t\sqrt{\frac{g}{2l^2}\left(l + \frac{h}{2g}\right)},$$

on trouvera

$$\begin{aligned}
l - z &= \quad \frac{2l^2}{g}\,[p(t+\omega_3) - e_3] = \frac{g}{l}\left(l + \frac{h}{2g}\right)\xi_{03}^2\,t = 2l\,\mathrm{sn}^2 u,\\
l + z &= -\frac{2l^2}{g}\,[p(t+\omega_3) - e_2] = 2l\,\xi_{13}^2\,t = 2l\,\mathrm{cn}^2 u,\\
z + \frac{h}{2g} &= -\frac{2l^2}{g}\,[p(t+\omega_3) - e_1] = \left(l + \frac{h}{2g}\right)\xi_{23}^2\,t = \frac{2l}{k^2}\,\mathrm{dn}^2 u,
\end{aligned}$$

$$x = 2l\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u, \qquad \mathrm{v} = \frac{2}{k}\sqrt{gl}\,\mathrm{dn}\,u,$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \mathrm{sn}\,u, \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \mathrm{cn}\,u, \qquad \theta = 2\,\mathrm{am}\,u.$$

Le caractère tournant et les propriétés de symétrie du mouvement se lisent immédiatement sur ces formules; la durée d'une révolution complète est donnée par la formule

$$\mathrm{T}\sqrt{\frac{g}{2l^2}\left(l + \frac{h}{2g}\right)} = 2\mathrm{K}.$$

§ V. — Pendule sphérique.

654. Soient $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, z les coordonnées d'un point pesant assujetti à se mouvoir sur une sphère de rayon l dont le centre est à l'origine des coordonnées; l'axe des z est dirigé suivant la nadirale. Soient v la vitesse du mobile, g l'accélération de la pesanteur, c et h les constantes des aires et des forces vives; les intégrales des aires et des forces vives

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \mathrm{c}, \qquad \mathrm{v}^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}{dt^2} = 2gz + h$$

et l'équation de la sphère $r^2 + z^2 = l^2$ fournissent immédiatement la relation

$$l^2 \frac{dz^2}{dt^2} = (2gz + h)(l^2 - z^2) - \mathrm{c}^2$$

dont nous désignerons, pour abréger, le second membre par $\varphi(z)$.

Convenons d'affecter de l'indice o les valeurs des variables pour $t = 0$. Excluons le cas où c serait nul, le mouvement étant alors le même que celui d'un pendule simple, et le cas où $\varphi(z_0)$ étant nul, z_0 serait racine double de $\varphi(z)$, le mobile décrivant alors d'un mouvement uniforme le parallèle sur lequel il se trouve d'abord.

Dans le cas général où nous nous plaçons, $\varphi(z_0)$ est positif ou nul et, s'il est nul, $\varphi(z)$ est positif pour des valeurs de t un peu plus grandes que o; la substitution dans $\varphi(z)$, à la place de z, des nombres $-\infty$, $-l$, z_0, l, $+\infty$ montre ainsi l'existence de trois racines réelles a, b, c placées comme l'indiquent les inégalités

$$l > a > z_0 > b > -l > c,$$

l'une des racines a, b pouvant être égale à z_0. De l'identité

$$(2gz + h)(l^2 - z^2) - \mathrm{c}^2 = -2g(z-a)(z-b)(z-c)$$

on déduit d'ailleurs les relations

$$a + b + c = -\frac{h}{2g}, \qquad ab + bc + ca = -l^2, \qquad abc = \frac{hl^2 - \mathrm{c}^2}{2g}.$$

Comme a et b sont compris entre $-l$ et $+l$, l'expression

$-ab-l^2$, donc aussi $(a+b)c$, est négative, en sorte que, c étant négatif, on doit avoir [1]

$$a+b>0, \qquad a>0.$$

655. Dans l'équation différentielle que vérifie z, faisons la substitution

$$z=-\frac{2l^2}{g}\mathrm{z}+\frac{1}{3}(a+b+c),$$

de manière à obtenir une équation différentielle de la forme

$$\left(\frac{d\mathrm{z}}{dt}\right)^2=4\mathrm{z}^3-g_2\mathrm{z}-g_3=4(\mathrm{z}-e_1)(\mathrm{z}-e_2)(\mathrm{z}-e_3),$$

les racines e_1, e_2, e_3, supposées telles que l'on ait $e_1>e_2>e_3$, correspondent respectivement à c, b, a, puisque z et z varient en sens contraire, et l'on a

$$e_1=\frac{g}{6l^2}(a+b-2c), \qquad e_2-e_3=\frac{g}{2l^2}(a-b),$$

$$e_2=\frac{g}{6l^2}(a-2b+c), \qquad e_1-e_3=\frac{g}{2l^2}(a-c),$$

$$e_3=\frac{g}{6l^2}(-2a+b+c), \qquad e_1-e_2=\frac{g}{2l^2}(b-c).$$

L'intégrale générale de l'équation différentielle est

$$\mathrm{z}=p(t+\lambda),$$

λ étant une constante arbitraire. En prenant, pour origine du temps, l'un des instants où le mobile est sur le parallèle $z=a$, on a

$$a=-\frac{2l^2}{g}p(\lambda)+\frac{1}{3}(a+b+c);$$

on en déduit que $p(\lambda)$ est égal à e_3; λ devra donc être congru à ω_3 (*modulis* $2\omega_1$, $2\omega_3$); nous prendrons $\lambda=\omega_3$. La solution de l'équation différentielle en z est

$$\mathrm{z}=p(t+\omega_3).$$

---

[1] *Voir* pour la discussion, le *Traité de Mécanique* de M. Appell, t. I, p. 485.

656. Avant d'aller plus loin, il convient de faire quelques observations concernant les données. Si, outre g et l, on regarde z_0 ou a comme une donnée, les deux constantes h et C ne sont plus indépendantes et l'on doit supposer C^2 égal à $r_0^2 V_0^2$, c'est-à-dire à $r_0^2(2ga+h)$, d'où

$$h = \frac{C^2}{l^2-a^2} - 2ga;$$

sous le bénéfice de cette supposition, l'équation $\varphi(z)=0$ admet la racine a; en la débarrassant de cette racine, on trouve, pour l'équation que doivent vérifier b, c, l'équation

$$z^2 - l^2 + (z+a)\frac{C^2}{2g(l^2-a^2)} = 0,$$

dont on aperçoit de suite que les racines sont réelles et séparées par le nombre $-a$; mais a devant être, par hypothèse, la plus grande racine de $\varphi(z)$, on doit avoir

$$a^2 - l^2 + \frac{aC^2}{g(l^2-a^2)} > 0, \qquad C^2 > \frac{gr_0^4}{a};$$

le cas limite où C^2 serait égal à $\frac{gr_0^4}{a}$ correspondrait au cas limite où a serait une racine double. La quantité C, que l'on peut évidemment supposer positive, peut prendre toutes les valeurs de $r_0^2\sqrt{\frac{g}{a}}$ à $+\infty$; toutes les constantes du problème dépendent alors de C. Une discussion élémentaire montre facilement que C augmentant de $r_0^2\sqrt{\frac{g}{a}}$ à $+\infty$, b décroît de a à $-a$ et c de $-\frac{a^2+l^2}{2a}$ à $-\infty$; $k^2 = \frac{a-b}{a-c}$ croît de zéro jusqu'au maximum $\frac{\sqrt{r_0^2+4a^2}-r_0}{\sqrt{r_0^2+4a^2}+r_0}$ qu'il atteint pour $C = \sqrt{\frac{2g(l^4-a^4)}{a}}$, puis décroît jusqu'à zéro; K et q varient dans le même sens que k^2, K de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ et q de 0 à 0; K′ varie dans le sens contraire de $+\infty$ à $+\infty$. Le sens de la variation de

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}} = Kl\sqrt{\frac{2}{g(a-c)}}$$

avec C n'apparaît pas immédiatement; mais il est clair que lorsque C

a dépassé la valeur $\sqrt{\frac{2g(l^4 - a^4)}{a}}$, ω_1 décroît et tend vers o quand C augmente indéfiniment; au reste il est aisé de trouver des limites supérieures de ω_1 en se servant par exemple de la relation $K < \frac{\pi}{2k'}$ (n° 538); on trouve ainsi

$$\frac{2\omega_1}{\pi l} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g}\sqrt{b-c}} \quad \text{ou} \quad \frac{2\omega_1}{\pi l} < \frac{2r_0}{\sqrt[4]{(C^2 - 4agr_0^2)^2 + 16g^2r_0^6}} < \frac{1}{\sqrt{gr_0}}.$$

Lorsque k^2 est très petit, c'est-à-dire lorsque C est très voisin de $r_0^2\sqrt{\frac{g}{a}}$, ou très grand, on peut se servir des formules (CXXII).

657. On peut écrire aussi

$$z - a = -\frac{2l^2}{g}\frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{pt - e_3} = -(a-b)\,\mathrm{sn}^2(2Kv),$$

$$z - b = \frac{2l^2}{g}(e_2-e_3)\frac{pt-e_1}{pt-e_3} = (a-b)\,\mathrm{cn}^2(2Kv),$$

$$z - c = \frac{2l^2}{g}(e_1-e_3)\frac{pt-e_2}{pt-e_3} = (a-c)\,\mathrm{dn}^2(2Kv),$$

où l'on a posé $v = \frac{t}{2\omega_1}$. Les valeurs ainsi trouvées pour z sont réelles, quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$. Quand le point t parcourt dans le sens direct le rectangle dont les sommets sont o, ω_1, $\omega_1 + \omega_3$, ω_3, on sait que pt varie en diminuant constamment de $+\infty$ à $-\infty$; on conclut de là et des formules précédentes que z va en diminuant constamment de $a(t = 0)$ à $b(t = \omega_1)$, puis à $c(t = \omega_1 + \omega_3)$, puis à $-\infty(t = \omega_3)$; là il passe brusquement de $-\infty$ à $+\infty$ et revient, pour $t = 0$, à la valeur a. Les mêmes résultats peuvent d'ailleurs se lire sur la seule formule

$$z - a = -\frac{2l^2}{g}[p(t+\omega_3) - e_3],$$

en suivant le chemin que parcourt le point $t + \omega_3$, ou le point $t - \omega_3$ qui fournit pour t la même valeur; dans ces conditions $p(t + \omega_3)$ va constamment en augmentant, en passant toutefois de $+\infty$ à $-\infty$ quand t atteint la valeur ω_3. Il suit de là que z atteint les valeurs $-l$, $+l$ pour deux points t_2, t_1 situés le premier

entre ω_1 et $\omega_1+\omega_3$, le second entre ω_3 et ω_1; on a, en ces deux points t_1, t_2,

$$l-a=-\frac{2l^2}{g}[p(t_1+\omega_3)-e_3], \qquad p(t_1+\omega_3)=\frac{-h-6gl}{12l^2},$$

$$l+a=\frac{2l^2}{g}[p(t_2+\omega_3)-e_3], \qquad p(t_2+\omega_3)=\frac{-h+6gl}{12l^2}.$$

658. Ces valeurs t_1, t_2 vont intervenir dans le calcul de θ, et il importe de donner le moyen de les calculer avec précision. Observons que l'on a, quel que soit t,

$$\frac{dz}{dt}=\pm\frac{1}{l}\sqrt{\varphi(z)}=-\frac{2l^2}{g}p'(t+\omega_3),$$

et que $\varphi(z)$ se réduit à $-c^2$ quand on suppose t égal à t_1 ou à t_2; on a donc, pour ces valeurs de t,

$$p'(t+\omega_3)=\pm\frac{igc}{2l^3};$$

d'ailleurs quand t décrit le segment $\omega_1\ldots\omega_1+\omega_3$, $p(t+\omega_3)$ va en augmentant; si donc on pose pour un instant $t=\omega_1+i\lambda$, la dérivée, par rapport à la variable (réelle) λ, de la fonction (réelle) $p(\omega_1+\omega_3+\lambda i)$ sera positive pour les valeurs de λ comprises entre 0 et $\frac{\omega_3}{i}$; on aura donc

$$ip'(t_2+\omega_3)>0$$

et, par suite,

$$p'(t_2+\omega_3)=-\frac{igc}{2l^3};$$

de même

$$p'(t_1+\omega_3)=+\frac{igc}{2l^3}.$$

On a ainsi tout ce qu'il faut pour appliquer les formules (CXXVIII) et calculer, si l'on se donne les éléments numériques du problème, les quantités $t_1+\omega_3$, $t_2+\omega_3$ à des multiples près des périodes, c'est-à-dire, dans le cas actuel, sans aucune ambiguïté.

659. Remarquons, en passant, que les deux valeurs $t_1+\omega_3$, $-t_2-\omega_3$ font acquérir à la fonction $p't$ la valeur $\frac{igc}{2l^3}$; la fonc-

tion $p't - \frac{igc}{2l^3}$ est une fonction doublement périodique de t, du troisième ordre, avec o pour pôle triple; la somme de ses zéros devant être congrue à la somme de ses pôles, on en conclut que son troisième zéro est $t_2 - t_1$; en d'autres termes, on a

$$p'(t_2 - t_1) = \frac{igc}{2l^3}.$$

On peut évidemment poser $t_2 - t_1 = \omega_1 + i\lambda$, λ étant une quantité réelle comprise entre $-\frac{\omega_3}{i}$ et $\frac{\omega_3}{i}$; la formule précédente montre que λ est *positif* : en effet, la dérivée, par rapport à la variable (réelle) λ, de la fonction (réelle) $p(\omega_1 + i\lambda)$, c'est-à-dire $ip'(\omega_1 + i\lambda)$, est de signe contraire à λ, puisque $p(\omega_1 + i\lambda)$ décroît quand λ croît de o à $\frac{\omega_3}{i}$ et croît quand λ croît de $-\frac{\omega_3}{i}$ à o; or, d'après la formule précédente, $ip'(\omega_1 + i\lambda)$, c'est-à-dire $ip'(t_2 - t_1)$, est négatif. Ainsi λ, c'est-à-dire $\frac{1}{i}(t_2 - t_1 - \omega_1)$, est compris entre o et $\frac{\omega_3}{i}$ (1).

Il va sans dire que l'expression de $p'(t_2 - t_1)$ aurait pu être déduite, par les théorèmes d'addition, des expressions de $p(t_1 + \omega_3)$, $p(t_2 + \omega_3)$, $p'(t_1 + \omega_3)$, $p'(t_2 + \omega_3)$. Voici quelques formules obtenues par cette voie et qui pourraient servir pour le calcul de t_1, t_2 :

$$p(t_1 + t_2) = \frac{2hl^2 - 3c^2}{12l^4}, \qquad p'(t_1 + t_2) = \frac{ic(hl^2 - c^2)}{4l^6},$$

$$p(t_2 - t_1) = \frac{h}{6l^2}, \qquad p'(t_2 - t_1) = \frac{igc}{2l^3}.$$

660. L'expression de $p'(t_1 + t_2)$ montre que $t_1 + t_2$ a la valeur ω_1 pour $hl^2 = c^2$, c'est-à-dire pour $c^2 = \frac{2}{a} gl^2 r_0^2$, valeur dont on reconnaît de suite qu'elle est plus grande que la limite inférieure de c^2 et plus petite que la valeur de c^2 qui rend k^2 maximum. Pour cette valeur particulière, on se trouve dans un cas signalé par M. Greenhill, où les formules se simplifient notablement;

(1) Les valeurs des fonctions sn, cn, dn, pour les valeurs de v qui correspondent à $t = t_1$ ou $t = t_2$ se déduisent très facilement des expressions de $z - a$, $z - b$, $z - c$, et l'on a, dans tout ce qui précède, tout ce qu'il faut pour la détermination des signes.

d'abord b est nul, en sorte que le mobile reste compris entre l'équateur de la sphère et le parallèle $z=a$; on a ensuite

$$c=-\frac{l^2}{a}, \qquad k^2=\frac{a^2}{a^2+l^2},$$

$$\sqrt{e_1-e_3}=\sqrt{\frac{g}{2l^2}}\sqrt{\frac{a^2+l^2}{a^2}}, \qquad c\omega_1=2l^2\mathrm{K}\frac{\sqrt{l^2-a^2}}{\sqrt{l^2+a^2}}.$$

Lorsque C^2 est compris entre $\frac{1}{a}gr_0^4$ et $\frac{2}{a}gl^2r_0^2$, b est positif et $i\mathrm{p}'(t_1+t_2)$ est négatif; c'est le contraire lorsque C dépasse $\frac{2}{a}gl^2r_0^2$; on a, suivant les deux cas,

$$\frac{t_1+(t_2-\omega_1)}{i} \lesseqgtr \frac{\omega_3}{i}.$$

661. C'est surtout en vue de la détermination de θ (ou de x, y) que nous avons calculé les valeurs de $\mathrm{p}(t_1+\omega_3)$, $\mathrm{p}'(t_1+\omega_3)$, ... On a

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\mathrm{C}}{l^2-z^2}=\frac{\mathrm{C}}{2l}\left(\frac{1}{l-z}+\frac{1}{l+z}\right),$$

d'où, en tenant compte des formules

$$l-z=(l-a)-(z-a)=\quad\frac{2l^2}{g}[\mathrm{p}(t+\omega_3)-\mathrm{p}(t_1+\omega_3)],$$

$$l+z=(l+a)+(z+a)=-\frac{2l^2}{g}[\mathrm{p}(t+\omega_3)-\mathrm{p}(t_2+\omega_3)],$$

qui résultent immédiatement des valeurs de $l-a$, $l+a$, $z-a$, que les précédents calculs mettent en évidence,

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{g\mathrm{C}}{4l^3}\left[\frac{1}{\mathrm{p}(t+\omega_3)-\mathrm{p}(t_1+\omega_3)}-\frac{1}{\mathrm{p}(t+\omega_3)-\mathrm{p}(t_2+\omega_3)}\right],$$

et en décomposant en éléments simples, ou, ce qui revient au même, en utilisant la seconde formule (CIII_1), les expressions de $\mathrm{p}'(t_1+\omega_3)$, $\mathrm{p}'(t_2+\omega_3)$, ainsi que les formules ($\mathrm{XII}_{4,5}$),

$$2i\frac{d\theta}{dt}=\zeta(t-t_1)+\zeta(t-t_2)-\zeta(t+t_1)-\zeta(t+t_2)+2\zeta_3t_1+2\zeta_3t_2.$$

En intégrant et choisissant la constante d'intégration de façon que θ s'annule en même temps que t, on a

$$e^{2i\theta}=-\frac{\sigma(t-t_1)\sigma(t-t_2)}{\sigma(t+t_1)\sigma(t+t_2)}e^{2t(\zeta_3t_1+\zeta_3t_2)};$$

d'ailleurs, à cause des expressions de $l-z$, $l+z$ que l'on a écrites plus haut et des formules (VII_1), on a aussi

$$r^2=(l-z)(l+z)=-\frac{(ac^2-gr_0^4)^2}{4\,l^4 r_0^4}\,\frac{\sigma(t+t_1)\,\sigma(t+t_2)\,\sigma(t-t_1)\,\sigma(t-t_2)}{\sigma_3^4 t\,\sigma_3^2 t_1\,\sigma_3^2 t_2}$$

$$=r_0^2\,\frac{\sigma(t+t_1)\,\sigma(t+t_2)\,\sigma(t-t_1)\,\sigma(t-t_2)}{\sigma_3^4 t\,\sigma^2 t_1\,\sigma^2 t_2};$$

donc

$$r^2 e^{2i\theta}=r_0^2\,\frac{\sigma^2(t-t_1)\,\sigma^2(t-t_2)}{\sigma_3^4 t\,\sigma^2 t_1\,\sigma^2 t_2}\,e^{2t(\zeta_3 t_1+\zeta_3 t_2)}$$

ou, en extrayant les racines carrées et choisissant le signe de façon que l'on ait $r=r_0$ pour $t=0$, $\theta=0$,

$$x+iy=re^{i\theta}=r_0\,\frac{\sigma(t-t_1)\,\sigma(t-t_2)}{\sigma_3^2 t\,\sigma t_1\,\sigma t_2}\,e^{t(\zeta_3 t_1+\zeta_3 t_2)}.$$

662. Cette formule montre que $x+iy$ et, par suite, x et y sont des fonctions univoques de t. La forme même de $x+iy$ montre que c'est une fonction doublement périodique de seconde espèce; c'est le produit d'une exponentielle par la fonction

$$\varphi(t)=\frac{\sigma(t-t_1)\,\sigma(t-t_2)}{\sigma_3^2 t},$$

dont les multiplicateurs μ_1, μ_3 relatifs aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$ sont respectivement

$$\mu_1=e^{-2\eta_1(t_1+t_2)},\qquad \mu_3=e^{-2\eta_3(t_1+t_2)}.$$

On pourrait prendre pour l'élément simple relatif à la fonction $x+iy$ la fonction

$$\mathcal{A}(t)=\frac{\sigma(t_1+t_2-t)}{\sigma(t_1+t_2)\,\sigma t}\,e^{t(\zeta_3 t_1+\zeta_3 t_2)}$$

et transformer l'expression de $x+iy$ en la décomposant en éléments simples (nº 367).

Nous nous bornerons à quelques remarques relatives à la fonction $\varphi(t)$, qui ne sont d'ailleurs que l'application des observations faites au nº 372. D'après ce qui a été dit plus haut, t_1+t_2 est de la forme $\omega_1+\alpha\omega_3$, α étant un nombre réel compris entre 0 et 2; si l'on considère la fonction doublement périodique de seconde espèce

$$\psi(t)=\varphi(t)\,e^{(\eta_1+\alpha\eta_3)t},$$

on voit de suite que ses multiplicateurs, relatifs aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$, sont respectivement $e^{-\alpha\pi i}$, $e^{\pi i}$; si, par conséquent, α est de la forme $\frac{p}{q}$, p et q étant des entiers premiers entre eux, $[\psi(t)]^{2q}$ sera une fonction doublement périodique ordinaire ; il en sera de même de l'expression

$$r^{2q}\, e^{2iq\theta+2qt(\eta_1+\alpha\eta_3-\zeta_1 t_1-\zeta_3 t_2)},$$

que l'on pourra obtenir sous forme explicite par la méthode de décomposition en éléments simples; elle admet le pôle unique ω_3, d'ordre de multiplicité $4q$. Comme on a donné plus haut l'expression de $p(t_1+t_2)$, d'où il est aisé de déduire celle de $p(\alpha\omega_3)$, on voit le moyen de déduire l'équation algébrique que doit vérifier la constante C pour que α ait une valeur donnée $\frac{p}{q}$, de l'équation algébrique que vérifie $p\left(\frac{p}{q}\omega_3\right)$, équation algébrique qui sera étudiée plus tard. Nous nous contenterons de ces indications sommaires sur un sujet qui se rattache d'ailleurs à la théorie des intégrales pseudo-elliptiques, que nous n'avons pas abordée; le cas simple où $\alpha = 1$ sera traité explicitement un peu plus loin ([1]).

663. En posant

$$v = \frac{t}{2\omega_1}, \qquad ir_1 = \frac{t_1}{2\omega_1}, \qquad \frac{1}{2} + ir_2 = \frac{t_2}{2\omega_1},$$

de façon que les quantités réelles r_1, r_2 soient positives et plus petites que $\frac{\tau}{2i}$, les formules de passage des fonctions σ aux fonctions $\mathfrak{I}$ fournissent immédiatement les formules

$$z - a = \frac{r_0}{i}\,\frac{\mathfrak{I}_3(ir_2)\mathfrak{I}_4(ir_1)}{\mathfrak{I}_1(ir_1)\mathfrak{I}_2(ir_2)}\,\frac{\mathfrak{I}_1^2(v)}{\mathfrak{I}_4^2(v)};$$

$$x + iy = r_0 e^{i\mathrm{A}v}\,\frac{\mathfrak{I}_4^2(0)}{\mathfrak{I}_4^2(v)}\,\frac{\mathfrak{I}_1(ir_1 - v)\mathfrak{I}_2(ir_2 - v)}{\mathfrak{I}_1(ir_1)\mathfrak{I}_2(ir_2)},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\mathrm{A} = \frac{1}{i}\left[\frac{\mathfrak{I}_3'(ir_2)}{\mathfrak{I}_3(ir_2)} + \frac{\mathfrak{I}_4'(ir_1)}{\mathfrak{I}_4(ir_1)}\right].$$

([1]) *Voir* GREENHILL, *Les Fonctions elliptiques et leurs applications*, trad. par GRIESS, Chap. III; *voir* aussi, pour le cas où $\alpha = 1$, le *Traité de Mécanique rationnelle* de M. APPELL, t. I, p. 494.

On peut faire sur ces expressions de $z-a$ et de $x+iy$, qui spécifient le mouvement du point x, y, z et qui sont appropriées au calcul numérique quand on se donne les éléments numériques du problème, quelques observations faciles qui se feraient d'ailleurs tout aussi bien, le lecteur ne l'ignore pas, sur les équations différentielles du mouvement.

L'expression de $z-a$ montre que les valeurs de z se reproduisent quand on remplace v par $v+1$; dans les mêmes conditions $x+iy$ se reproduit multiplié par le facteur $e^{i\mathrm{A}}$, ainsi qu'il résulte des formules (XXXIV) ou de ce que l'on vient de dire sur le caractère de la fonction $x+iy$; lorsqu'on a la position M du mobile à l'instant t, il suffit donc, pour obtenir sa position à l'instant $t+2\omega_1$, de faire tourner le plan $\mathrm{MO}z$ d'un angle égal à A autour de l'axe $\mathrm{O}z$; la périodicité du mouvement est ainsi bien mise en évidence et il est clair qu'il suffira d'étudier le mouvement de $t=0$ à $t=2\omega_1$. Il suffit même de l'étudier de $t=0$ à $t=\omega_1$, car à deux valeurs de t également éloignées de ω_1 correspondent deux valeurs de v de la forme $\frac{1}{2}-w$, $\frac{1}{2}+w$, dont la somme est égale à 1, et, par suite, les valeurs de z que l'on obtient sont manifestement égales, tandis que les valeurs de $x+iy$ s'obtiennent en multipliant un même nombre

$$r_0 e^{i\left(\pi+\frac{1}{2}\mathrm{A}\right)} \frac{\mathfrak{S}_4^2(0)}{\mathfrak{S}_3^2(w)\mathfrak{S}_2(ir_2)}$$

par deux nombres imaginaires conjugués

$$e^{-i\mathrm{A}w}\frac{\mathfrak{S}_2(-ir_1-w)\mathfrak{S}_1(-ir_2-w)}{\mathfrak{S}_1(-ir_1)}, \qquad e^{i\mathrm{A}w}\frac{\mathfrak{S}_2(ir_1-w)\mathfrak{S}_1(ir_2-w)}{\mathfrak{S}_1(ir_1)};$$

les deux positions correspondantes du mobile sont donc symétriques par rapport au plan qui passe par l'axe des z et la position M_1 que le mobile occupe à l'instant $t=\omega_1$, $(v=\frac{1}{2})$. Ce point M_1 est la position du mobile pour laquelle z est minimum; ses coordonnées sont données par les formules

$$z=b, \qquad x+iy=r_0\frac{\mathfrak{S}_4^2(0)}{\mathfrak{S}_3^2(0)}\frac{\mathfrak{S}_2(ir_1)\mathfrak{S}_1(ir_2)}{\mathfrak{S}_2(ir_2)\mathfrak{S}_1(ir_1)}e^{i\left(\pi+\frac{1}{2}\mathrm{A}\right)};$$

le coefficient de $e^{i\left(\pi+\frac{1}{2}\mathrm{A}\right)}$ est manifestement positif : c'est le rayon

vecteur r_1 de la projection du point M_1 sur le plan des xy; il est facile de vérifier qu'il est égal à $\sqrt{l^2 - b^2}$.

L'expression de $x + iy$ met en évidence que l'angle polaire de la projection du point M_1 est, à des multiples près de 2π, égal à $\pi + \frac{1}{2}A$, en sorte que la courbe décrite par l'extrémité du pendule est fermée, ou non, suivant que $\frac{1}{\pi}A$ est un nombre rationnel ou irrationnel. On verra plus loin que $\pi + \frac{1}{2}A$ est l'angle dont tourne effectivement le plan MOz autour de l'axe Oz pendant que t croît de 0 à ω_1, et non cet angle augmenté d'un multiple de 2π; mais ce qui précède suffit à montrer l'intérêt qui s'attache à la constante réelle A dont il convient de dire quelques mots.

664. On peut mettre A sous la forme

$$\frac{A}{4\pi} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n-1} \operatorname{sh} 2\pi r_1}{1 - 2q^{2n-1} \operatorname{ch} 2\pi r_1 + q^{4n-2}} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n-1} \operatorname{sh} 2\pi r_2}{1 + 2q^{2n-1} \operatorname{ch} 2\pi r_2 + q^{4n-2}};$$

r_1 et r_2 sont positifs et plus petits que $\frac{\tau}{2i}$; il en résulte que dans l'une et l'autre des séries chaque terme est positif; r_2 étant plus grand que r_1, on conçoit que A soit négatif, et c'est un point que Halphen a établi par une analyse intéressante que, toutefois, nous ne reproduirons pas en raison de sa complication [1]. Chacune des séries regardées comme une fonction soit de r_1, soit de r_2, la variable étant supposée comprise entre 0 et $\frac{\tau}{2i}$, est une fonction croissante : cela est évident pour chaque terme de la première et se vérifie sans peine pour chaque terme de la seconde; il résulte de cette remarque que l'on a

$$A > \frac{1}{i}\left[\frac{\mathfrak{S}'_4(ir_1)}{\mathfrak{S}_4(ir_1)} + \frac{\mathfrak{S}'_3\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\mathfrak{S}_3\left(\frac{\tau}{2}\right)}\right];$$

---

[1] Après Halphen, M. de Saint-Germain a obtenu le même résultat sans faire usage des fonctions elliptiques; il a, en effet, montré [Cf. *Note sur le pendule sphérique* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e sér., t. XX, p. 114)] que l'angle dont a tourné le plan MOz autour de Oz quand t croît de 0 à ω_1 est plus petit que π; on va voir que cet angle est égal à $\frac{\pi}{2} + A$; de sa démonstration résulte donc immédiatement que A est négatif.

mais on a

$$\frac{\mathfrak{I}_3'\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\mathfrak{I}_3\left(\frac{\tau}{2}\right)} = -i\pi;$$

on en conclut

$$\text{A} > -\pi, \qquad \frac{\text{A}}{2} + \pi > \frac{\pi}{2}.$$

Il serait intéressant d'étudier comment A varie avec la constante C dont dépendent r_1, r_2 et q.

Signalons quelques autres expressions de A. On a

$$\begin{aligned}\text{A} &= \frac{2\omega_1}{i}(\zeta_3 t_1 + \zeta_3 t_2) - \frac{2\eta_1}{i}(t_1 + t_2)\\ &= \frac{\text{C}\omega_1}{l^2} + \frac{2\omega_1}{i}\zeta(t_1 + t_2) - \frac{2\eta_1}{i}(t_1 + t_2) = \frac{\text{C}\omega_1}{l^2} + \frac{1}{i}\frac{\mathfrak{I}_2'(ir_1 + ir_2)}{\mathfrak{I}_2(ir_1 + ir_2)};\end{aligned}$$

la seconde de ces formules qui, seule, a peut-être besoin d'explication, a été déduite de la première en remplaçant dans la première des formules (VII_3) u et a par $t_1 + \omega_3$, $t_2 + \omega_3$ et en utilisant les valeurs préalablement calculées de $p(t_1 + \omega_3)$, $p'(t_1 + \omega_3)$, $p(t_2 + \omega_3)$, $p'(t_2 + \omega_3)$.

665. Dans le cas particulier déjà signalé au n° 660, où

$$r_1 + r_2 = \frac{\tau}{2i}, \qquad \text{C}^2 = \frac{2}{a}gl^2r_0^2, \qquad b = 0, \qquad c = -\frac{l^2}{a}, \qquad \dots,$$

on a tout d'abord

$$\text{A} = \frac{\text{C}\omega_1}{l^2} - \pi = 2\text{K}\sqrt{\frac{l^2 - a^2}{l^2 + a^2}} - \pi,$$

et le fait que A est négatif apparaît bien facilement en se servant de la relation $\text{K} < \frac{\pi}{2k'}$ qui donne

$$\text{K} < \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{l^2 + a^2}}{l}, \qquad \text{A} < \pi\left(\frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{l} - 1\right) < 0.$$

L'intérêt de ce cas particulier consiste en ce que l'on y peut obtenir séparément les valeurs de x et de y. En remplaçant, dans l'expression de $x + iy$, ir_2 par $\frac{1}{2}\tau - ir_1$, on trouve de suite

$$x + iy = r_0 e^{i(\text{A}+\pi)v}\frac{\mathfrak{I}_4^2(0)}{\mathfrak{I}_4^2(v)}\frac{\mathfrak{I}_1(ir_1 - v)\mathfrak{I}_3(ir_1 + v)}{\mathfrak{I}_1(ir_1)\mathfrak{I}_3(ir_1)};$$

en appliquant ensuite la première formule (LVI_4) et les formules (LXXI), puis en posant pour abréger

$$\mu = i\,\frac{\mathfrak{S}_2(ir_1)\,\mathfrak{S}_4(ir_1)}{\mathfrak{S}_1(ir_1)\,\mathfrak{S}_3(ir_1)},$$

on obtient

$$x + iy = r_0 e^{i(\mathrm{A}+\pi)v}\,[\mathrm{cn}(2\mathrm{K}v) + i\mu\,\mathrm{sn}(2\mathrm{K}v)\,\mathrm{dn}(2\mathrm{K}v)],$$

ou, puisque A et μ sont réels,

$$x = r_0[\cos(\mathrm{A}+\pi)v\,\mathrm{cn}(2\mathrm{K}v) - \mu\sin(\mathrm{A}+\pi)v\,\mathrm{sn}(2\mathrm{K}v)\,\mathrm{dn}(2\mathrm{K}v)],$$
$$y = r_0[\sin(\mathrm{A}+\pi)v\,\mathrm{cn}(2\mathrm{K}v) + \mu\cos(\mathrm{A}+\pi)v\,\mathrm{sn}(2\mathrm{K}v)\,\mathrm{dn}(2\mathrm{K}v)].$$

En faisant $v = \frac{1}{2}$ dans ces formules et en se rappelant que pour cette valeur z est nul et $\sqrt{x^2+y^2}$ égal à l, on trouve sans peine

$$\mu = \sqrt{\frac{l^2+a^2}{l^2-a^2}},$$

et c'est ce qu'il n'est pas difficile de vérifier, d'ailleurs, sur l'expression même de μ.

666. Il nous reste à étudier, dans le cas général, la façon dont θ varie avec t. De l'expression de $e^{2i\theta}$ donnée au n° 661, on déduit aisément, au moyen des formules de passage des fonctious σ aux fonctions $\mathfrak{S}$, la formule

$$\theta = \mathrm{A}v + \frac{1}{2i}\log f(v),$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$f(v) = \frac{\mathfrak{S}_1(ir_1 - v)\,\mathfrak{S}_2(ir_2 - v)}{\mathfrak{S}_1(ir_1 + v)\,\mathfrak{S}_2(ir_2 + v)} = \frac{\mathfrak{S}_1(ir_1 - v)\,\mathfrak{S}_1(v - \frac{1}{2} - ir_2)}{\mathfrak{S}_1(ir_1 + v)\,\mathfrak{S}_1(v - \frac{1}{2} + ir_2)};$$

dans cette formule qui donne, à chaque instant t, l'angle θ dont a tourné le rayon vecteur dans le plan des xy, il s'agit de fixer, pour chaque valeur de v, la détermination du logarithme. Nous nous y arrêterons d'autant plus volontiers que la même question se présente dans un très grand nombre d'applications.

Pour suivre la voie régulière qui a été indiquée au Chapitre VI et qui permet sûrement de lever toute ambiguïté, il faut tout d'abord transformer l'expression de $\frac{d\theta}{dt}$ de manière qu'il n'y figure

plus que les dérivées logarithmiques de la fonction $\mathfrak{I}_1$; on trouve alors

$$\frac{d\theta}{dv} = \text{A} + \frac{1}{2i}\left[\frac{\mathfrak{I}'_1(v-ir_1)}{\mathfrak{I}_1(v-ir_1)} - \frac{\mathfrak{I}'_1(v+ir_1)}{\mathfrak{I}_1(v+ir_1)} + \frac{\mathfrak{I}'_1(v-\frac{1}{2}-ir_2)}{\mathfrak{I}_1(v-\frac{1}{2}-ir_2)} - \frac{\mathfrak{I}'_1(v-\frac{1}{2}+ir_2)}{\mathfrak{I}_1(v-\frac{1}{2}+ir_2)}\right],$$

et pour avoir la valeur de θ, qui correspond à une valeur donnée de v, il suffit d'effectuer les intégrales rectilignes

$$\int_0^v \frac{\mathfrak{I}'_1(v-ir_1)}{\mathfrak{I}_1(v-ir_2)}\,dv, \qquad \int_0^v \frac{\mathfrak{I}'_1(v+ir_1)}{\mathfrak{I}_1(v+ir_1)}\,dv, \qquad \dots.$$

On observera d'abord que dans l'évaluation des logarithmes, qui résultent de l'intégration, on n'a à se préoccuper que des parties purement imaginaires; les parties réelles disparaissent évidemment dans les différences. Les quatre intégrales à évaluer peuvent être remplacées par les suivantes

$$\int_{-ir_1}^{-ir_1+v}, \qquad \int_{ir_1}^{ir_1+v}, \qquad \int_{-\frac{1}{2}-ir_2}^{-\frac{1}{2}-ir_2+v}, \qquad \int_{-\frac{1}{2}+ir_2}^{-\frac{1}{2}+ir_2+v},$$

où les signes $\int$ portent maintenant sur la quantité $\frac{\mathfrak{I}'_1 v}{\mathfrak{I}_1 v}$; le problème de l'évaluation de pareilles intégrales a été complètement résolu au Chapitre VI; nous nous reporterons à la méthode exposée aux nos 506 et suivants.

667. Supposons d'abord que v soit compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que t soit compris entre 0 et ω_1; on voit alors de suite que pour les quatre intégrales le chemin d'intégration est contenu dans l'aire du rectangle (R) figuré à la page 155 du tome III et formé par la réunion des quatre rectangles (R_1), (R_2), (R_3), (R_4), en sorte que (CXVIII_1) les quatre intégrales précédentes sont respectivement égales à

$$\begin{aligned}
&\log\mathfrak{I}_1(v-ir_1) - \log\mathfrak{I}_1(-ir_1),\\
&\log\mathfrak{I}_1(v+ir_1) - \log\mathfrak{I}_1(ir_1),\\
&\log\mathfrak{I}_1(v-\tfrac{1}{2}-ir_2) - \log\mathfrak{I}_1(-\tfrac{1}{2}-ir_2),\\
&\log\mathfrak{I}_1(v-\tfrac{1}{2}+ir_2) - \log\mathfrak{I}_1(-\tfrac{1}{2}+ir_2),
\end{aligned}$$

où les logarithmes ont leurs déterminations principales, en observant toutefois que les points $\mathfrak{S}_1(-\frac{1}{2}-ir_2)$, $\mathfrak{S}_1(-\frac{1}{2}+ir_2)$ doivent être regardés comme étant le premier sur le bord inférieur de la coupure de gauche, le second sur le bord supérieur de la même coupure, en sorte que les coefficients de i dans les logarithmes sont respectivement $-\pi$, $+\pi$; ils sont $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ pour $\log\mathfrak{S}_1(-ir_1)$, $\log\mathfrak{S}_1(ir_1)$; on aura donc, dans ce cas,

$$\begin{aligned}\theta = \mathrm{A}v + \frac{1}{2i}\Big[&\log\mathfrak{S}_1(v-ir_1)-\log\mathfrak{S}_1(v+ir_1)\\ &+\log\mathfrak{S}_1\left(v-\frac{1}{2}-ir_2\right)-\log\mathfrak{S}_1\left(v-\frac{1}{2}+ir_2\right)\Big]+\frac{3\pi}{2},\end{aligned}$$

en attribuant aux logarithmes leurs déterminations principales; d'ailleurs, le point $\mathfrak{S}_1(v+ir_1)$ est situé dans l'aire (R'_1), le point $\mathfrak{S}_1(v-ir_1)$ est le point de l'aire (R'_4) symétriquement placé par rapport à l'axe des quantités réelles; il résulte de là que

$$\frac{1}{2i}[\log\mathfrak{S}_1(v-ir_1)-\log\mathfrak{S}_1(v+ir_1)]$$

est l'angle, compris entre o et $-\frac{\pi}{2}$, dont il faut faire tourner le rayon vecteur qui va de o au point $\mathfrak{S}_1(v+ir_1)$ pour l'amener sur la partie positive de l'axe des quantités réelles; de même, puisque les points $\mathfrak{S}_1(v-\frac{1}{2}-ir_2)$, $\mathfrak{S}_1(v-\frac{1}{2}+ir_2)$ sont symétriquement placés dans les aires (R'_3), (R'_2), on voit que

$$\frac{1}{2i}\left[\log\mathfrak{S}_1\left(v-\frac{1}{2}-ir_2\right)-\log\mathfrak{S}_1\left(v-\frac{1}{2}+ir_2\right)\right]$$

est l'angle (obtus), compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\pi$, dont il faut faire tourner le vecteur qui va du point o au point $\mathfrak{S}_1(v-\frac{1}{2}+ir_2)$ pour l'amener sur la partie positive de l'axe des quantités réelles; d'après cela, on reconnaît très aisément que l'on peut écrire

$$\theta = \mathrm{A}v+\frac{\alpha+\beta}{2},$$

en désignant par α et β deux angles positifs, moindres que π, dont le premier s'obtient en faisant tourner dans le sens positif le vecteur qui va du point o au point $\mathfrak{S}_1(ir_1+v)$ pour l'amener sur le vecteur qui va du point o au point $\mathfrak{S}_1(ir_1-v)$, dont le se-

cond s'obtient en faisant tourner dans le même sens le vecteur qui va du point o au point $\mathfrak{S}_1(v-\frac{1}{2}+ir_2)$ ou $\mathfrak{S}_2(v+ir_2)$ pour l'amener sur le vecteur qui va du point o au point $\mathfrak{S}_1(v-\frac{1}{2}-ir_2)$ ou $\mathfrak{S}_2(v-ir_2)$; on peut encore écrire, si l'on veut,

$$\theta = \mathrm{A}v + \frac{1}{2i}\log f(v),$$

en convenant de prendre le second terme du second membre compris entre o et π; il a d'ailleurs la valeur o pour $v=0$, et la valeur π pour $v=\frac{1}{2}$; pour $v=0$, α et β sont nuls; pour $v=\frac{1}{2}$, α et β sont égaux à π. L'angle Θ dont le plan MOz a tourné autour de Oz, quand t varie de o à ω_1 (v de o à $\frac{1}{2}$), est bien égal, comme on l'a dit plus haut, à $\pi+\frac{\mathrm{A}}{2}$.

De ce que A est compris entre $-\pi$ et o on conclut que Θ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π. C'est Puiseux qui a, le premier, démontré que Θ est toujours plus grand que $\frac{\pi}{2}$. Sa démonstration (*Journal de Liouville*, 1re série, t. VII; 1842), qui est devenue classique, n'a toutefois rien à voir avec la théorie des fonctions elliptiques.

668. Nous avons exposé ces résultats en suivant pas à pas la voie indiquée au Chapitre VI; on y parvient d'une façon plus courte, en interprétant la formule même qui donne l'expression de θ et en remarquant que θ devant s'annuler pour $t=0$, $\log f(v)$ doit être nul pour $v=0$ et que les valeurs que prend successivement cette fonction se suivent d'une façon continue. En se reportant toujours à la *fig.* 155 du Tome III, et en suivant la façon dont se déplacent dans les aires (R'_1), (R'_2), (R'_3), (R'_4) les points $\mathfrak{S}_1(ir_1+v)$, $\mathfrak{S}_2(ir_1-v)$, ... on n'a aucune peine à retrouver les résultats précédents.

L'étude peut se poursuivre lorsque v est compris entre $\frac{1}{2}$ et 1, en partant de la propriété $f(1-v)f(v)=1$ de la fonction $f(v)$ qui résulte immédiatement des formules (XXXIV); si l'on pose $v=\frac{1}{2}+w$, on devra, à cause de cette propriété, adopter, pour les valeurs de w comprises entre o et $\frac{1}{2}$, une détermination de $\frac{1}{2i}\log f(\frac{1}{2}+w)$ de la forme

$$\frac{1}{2i}\log f\left(\frac{1}{2}+w\right) = k\pi - \frac{1}{2i}\log f\left(\frac{1}{2}-w\right),$$

où k est un nombre entier déterminé; cet entier est, d'ailleurs, égal à 2, puisque pour $v = \frac{1}{2}$, $w = 0$, la formule précédente se réduit à $\log f(\frac{1}{2}) = ik\pi$ et que l'on sait que $\log f(\frac{1}{2}) = 2i\pi$. La symétrie du mouvement se reconnaît très aisément sur cette même formule; nous ne nous y arrêterons pas, puisqu'elle a été établie sur l'expression de $x + iy$. En résumé, de $v = \frac{1}{2}$ à $v = 1$, on a

$$\theta = \text{A}v + \frac{1}{2i}\log f(v)$$

si l'on convient de prendre pour le second terme du second membre celle de ses déterminations qui est comprise entre π et 2π. Pour $v = 1$, on a

$$\theta = \text{A} + \frac{1}{2i}\log f(1) = \text{A} + 2\pi = 2\Theta;$$

ce dernier résultat aurait pu se déduire aisément de la formule (CXXVIII_2).

Pour poursuivre cette étude lorsque v est plus grand que 1, il suffirait de partir de la propriété de la fonction v exprimée par les relations

$$f(v) = f(1+v) = f(2+v) = f(3+v) = \ldots;$$

on peut ainsi montrer directement que quand v est successivement compris entre 1 et $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$ et 2, 2 et $\frac{5}{2}$, ..., $\frac{n}{2}$ et $\frac{n+1}{2}$, ..., c'est-à-dire t entre $2\omega_1$ et $3\omega_1$, $3\omega_1$ et $4\omega_1$, $4\omega_1$ et $5\omega_1$, ..., $n\omega_1$ et $(n+1)\omega_1$ ..., on doit dans la formule

$$\theta = \text{A}v + \frac{1}{2i}\log f(v)$$

prendre successivement, pour le second terme du second membre, celle de ses déterminations qui est comprise entre 2π et 3π, 3π et 4π, 4π et 5π, ..., $n\pi$ et $(n+1)\pi$, ...

§ VI. — Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe dans le cas où il n'y a pas de force extérieure.

669. Nous allons étudier le mouvement d'un corps solide dont un point O est fixe et qui n'est soumis à aucune force autre que la réaction du point fixe. Nous renvoyons, pour ce qui concerne la partie mécanique du problème et l'établissement des équations

différentielles du mouvement, aux divers Traités de Mécanique rationnelle, particulièrement à la Note de M. Darboux sur les mouvements à la Poinsot, qui se trouve dans le Traité de Despeyrous; nous emprunterons à cette Note nos notations, d'une part, et, d'autre part, l'équation différentielle de l'herpolodie.

Le corps solide est rapporté à un système de coordonnées rectangulaires $Oxyz$ qu'il entraîne avec lui et que l'on supposera coïncider avec les axes principaux d'inertie relatifs au point O. Le problème final consiste à déterminer à chaque instant la position du trièdre $Oxyz$ par rapport à un système d'axes fixes OXYZ; il est résolu si l'on connaît, en fonction du temps t, les trois angles d'Euler qui déterminent la position du trièdre mobile par rapport au trièdre fixe. C'est à ce résultat que nous nous attacherons ([1]).

Soit (E) l'ellipsoïde d'inertie du solide pour le point O; soit $O\Omega$ le vecteur qui figure la vitesse angulaire de rotation ω, vecteur dont les projections sur les axes Ox, Oy, Oz sont p, q, r. Le moment des quantités de mouvement est un vecteur fixe dans l'espace dont nous désignerons la longueur par l, et dont les projections sur les axes Ox, Oy, Oz sont Ap, Bq, Cr, en désignant par A, B, C les moments d'inertie du solide par rapport à ces axes. L'ellipsoïde (E) est constamment tangent à un plan fixe (Π), au point J où ce plan est percé par la demi-droite qui porte le vecteur $O\Omega$; le lieu du point J dans le plan fixe (Π) est l'herpolodie, le lieu du même point sur l'ellipsoïde (E) est la polodie; la polodie roule sans glisser sur l'herpolodie; le problème peut être regardé comme résolu quand ce dernier mouvement est connu. Nous laisserons de côté les cas où la polodie se décompose en deux ellipses se coupant suivant l'axe moyen de (E), ou en deux cercles parallèles, ou encore se réduit à deux points; l'herpolodie est

---

([1]) M. Klein a employé d'autres paramètres qui donnent des résultats plus symétriques. On peut consulter, sur ce sujet, le livre qu'il a publié avec M. Sommerfield sous le titre *Ueber die Theorie des Kreisels*, ou une Note de M. Lacour dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 5e série, t. XVIII; 1899. Les expressions des neuf cosinus sont dues à Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 39; 1850). Les formules auxquelles nous nous bornons ont été données sous une forme à peine différente par Hermite (*Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, Paris, 1885). On peut aussi consulter : Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II; 1888; Lindemann, *Sitzungsberichte* de l'Académie des Sciences de Munich, t. XXVIII; 1898, et Lacour, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1900.

alors une spirale (dont l'équation s'obtient au moyen des fonctions élémentaires), un cercle ou un point.

Nous supposerons l'herpolodie, dans le plan (Π), rapportée à un système de coordonnées polaires; le pôle sera le pied P de la perpendiculaire abaissée de O sur (Π) et l'axe polaire sera la direction qui va du point P vers la position initiale J_0 du point J; nous représenterons par δ la distance OP du point O au plan (Π) : elle est évidemment comprise entre la plus petite et la plus grande des quantités $\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{B}}, \frac{1}{\sqrt{C}}$; nous désignerons par $R\delta$ et Θ les coordonnées polaires du point J dans le plan (Π).

Les intégrales des forces vives et des aires fournissent les relations

$$h = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2, \qquad l^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2;$$

la constante des forces vives h est liée à l par la relation $h = l^2\delta^2$ qui se déduit immédiatement de ce que, si x, y, z désignent les coordonnées du point J par rapport au trièdre $Oxyz$, on a

$$\frac{x^2}{p^2} = \frac{y^2}{q^2} = \frac{z^2}{r^2} = \frac{\delta^2 + R^2\delta^2}{\omega^2} = \frac{1}{h} = \frac{1}{l^2\delta^2}.$$

Nous introduirons enfin une constante positive μ définie par les relations

$$\mu = \delta\sqrt{h} = l\delta^2.$$

On a alors

$$\omega^2 = h\delta^2(1 + R^2) = \mu^2(1 + R^2).$$

670. Nous poserons

$$\frac{1}{a} = A\delta^2, \qquad \frac{1}{b} = B\delta^2, \qquad \frac{1}{c} = C\delta^2;$$

en vertu d'une observation antérieure, 1 est compris entre la plus grande et la plus petite des quantités a, b, c; nous poserons aussi

$$\begin{aligned} T_a &= -(1-b)(1-c), \\ T_b &= -(1-c)(1-a), \\ T_c &= (1-a)(1-b). \end{aligned}$$

Enfin, nous nous contenterons d'écrire les équations suivantes dans les cinq premières desquelles on reconnaîtra les équations d'Euler, les intégrales des forces vives et des aires, et dont les trois

dernières s'obtiennent en résolvant, par rapport à p^2, q^2, r^2, celles des équations précédentes qui sont linéaires en p^2, q^2, r^2,

$$bc\frac{dp}{dt}+a(b-c)qr=0, \qquad \frac{p^2}{a}+\frac{q^2}{b}+\frac{r^2}{c}=\mu^2,$$

$$ca\frac{dq}{dt}+b(c-a)rp=0, \qquad \frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2}=\mu^2,$$

$$ab\frac{dr}{dt}+c(a-b)pq=0, \qquad p^2+q^2+r^2=\omega^2=\mu^2(R^2+1),$$

$$p^2=\frac{a^2\mu^2(T_a-R^2)}{(c-a)(a-b)}, \qquad q^2=\frac{b^2\mu^2(T_b-R^2)}{(a-b)(b-c)}, \qquad r^2=\frac{c^2\mu^2(T_c-R^2)}{(b-c)(c-a)}.$$

De ces équations, de la relation

$$p\frac{dp}{dt}+q\frac{dq}{dt}+r\frac{dr}{dt}=\mu R\frac{dR}{dt},$$

et des équations d'Euler, on tire sans peine la relation

$$R^2\frac{dR^2}{dt^2}=\mu^2(T_a-R^2)(T_b-R^2)(T_c-R^2).$$

Si l'on y fait

$$\mu^2R^2=\tfrac{1}{3}\mu^2(T_a+T_b+T_c)-y_1,$$

elle prend la forme normale

$$\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2=4(y_1-e_\alpha)(y_1-e_\beta)(y_1-e_\gamma),$$

où

$$e_\alpha=\tfrac{1}{3}\mu^2(T_b+T_c-2T_a), \qquad e_\beta-e_\gamma=\mu^2(b-c)(1-a),$$

$$e_\beta=\tfrac{1}{3}\mu^2(T_c+T_a-2T_b), \qquad e_\gamma-e_\alpha=\mu^2(c-a)(1-b),$$

$$e_\gamma=\tfrac{1}{3}\mu^2(T_a+T_b-2T_c), \qquad e_\alpha-e_\beta=\mu^2(a-b)(1-c).$$

Nous conviendrons de ranger les axes Ox, Oy, Oz de manière que b soit compris entre a et c et que $(1-b)(1-c)$ soit positif; deux cas sont alors possibles :

1° $\qquad a>b>1>c,$

2° $\qquad a<b<1<c;$

on constate que, dans ces deux cas, on a $e_\gamma>e_\alpha>e_\beta$; nous prendrons toujours, en conséquence, $\gamma=1$, $\alpha=2$, $\beta=3$; en sorte

que l'on aura

$$\begin{aligned}
\sqrt{e_1-e_2} &= \mu\left|\sqrt{(a-c)(b-1)}\right|, & k &= \left|\sqrt{\frac{a-b}{b-c}\,\frac{1-c}{a-1}}\right|,\\
\sqrt{e_2-e_3} &= -\mu\left|\sqrt{(a-b)(1-c)}\right|,\\
\sqrt{e_1-e_3} &= \mu\left|\sqrt{(b-c)(a-1)}\right|, & k' &= \left|\sqrt{\frac{a-c}{b-c}\,\frac{b-1}{a-1}}\right|.
\end{aligned}$$

671. L'intégrale de l'équation différentielle en y_1 est de la forme

$$y_1 = \wp(t+\lambda),$$

λ étant une constante. Il est aisé de reconnaître que l'axe instantané de rotation vient, pour des valeurs convenables de t, se placer dans le plan des xz; nous choisirons un de ces instants pour origine du temps; nous supposerons, de plus, que les directions positives des axes soient telles que, pour $t=0$, les valeurs p_0, r_0 de p, r soient positives; pour $t=0$, $q=0$, et, d'après la seconde équation d'Euler, $\frac{dq}{dt}$ est du signe de $a-c$; nous désignerons par ε l'unité positive ou négative suivant que a est plus grand ou plus petit que c; enfin, nous introduirons une constante purement imaginaire v satisfaisant aux inégalités $0<\frac{v}{i}<\frac{\omega_3}{i}$ et définie par les égalités concordantes

$$\xi_{10}v = \frac{\mu}{i}\left|\sqrt{(a-1)(a-c)}\right|, \qquad \xi_{20}v = \frac{\mu}{i}\left|\sqrt{(a-b)(a-c)}\right|,$$

$$\xi_{30}v = \frac{\mu}{i}\left|\sqrt{(a-1)(a-b)}\right|,$$

$$i\wp' v = 2\varepsilon\mu^3(a-b)(a-c)(a-1).$$

Pour $t=0$, $q=0$, R^2 doit être égal à T_b, donc y_1 qui se réduit à $\wp\lambda$ doit être égal à e_3; λ doit donc être congru à ω_3, *modulis* $2\omega_1$, $2\omega_3$; rien n'empêche de supposer $\lambda=\omega_3$. De la relation $y_1=\wp(t+\omega_3)$ on conclut l'expression de R^2 en fonction de t, savoir

$$\begin{aligned}
R^2 &= (c-1)(1-a) - \frac{1}{\mu^2}(e_1-e_3)(e_2-e_3)\xi_{03}^2 t\\
&= R_0^2[1-(e_1-e_3)\xi_{21}^2 v\,\xi_{03}^2 t] = R_0^2\,\frac{\sigma_1(v+t)\,\sigma_1(v-t)}{\sigma_3^2 t\,\sigma_1^2 v},
\end{aligned}$$

où R_0 est la valeur de R pour $t=0$; ayant ainsi l'expression de y_1 ou de R^2, on en déduit celle de p^2, q^2, r^2, puis, en extrayant les

racines carrées et en déterminant les signes de façon que, pour $t=0$, p, r soient positifs et que q ait le signe de ε,

$$p = a\mu\left|\sqrt{\frac{1-c}{a-c}}\right|\xi_{13}t = p_0\xi_{13}t,$$

$$q = \varepsilon b\mu^2\left|\sqrt{(a-1)(1-c)}\right|\xi_{03}t = p_0 r_0\frac{a-c}{ac}\xi_{03}t,$$

$$r = c\mu\left|\sqrt{\frac{a-1}{a-c}}\right|\xi_{23}t = r_0\xi_{23}t.$$

672. Pour déterminer Θ en fonction de t, nous partirons de la relation, établie par M. Darboux,

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\Theta}{dt} = 1 + \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{R^2};$$

il suffit de remplacer R^2 par sa valeur en fonction de pt, et d'appliquer la méthode de décomposition en éléments simples, ou plutôt la seconde formule (CIII_4), pour trouver

$$\begin{aligned}\frac{d\Theta}{dt} &= \mu b + \frac{1}{2i\varepsilon}\frac{p'(v+\omega_1)}{pt - p(v+\omega_1)}\\ &= \mu b + \frac{1}{2i\varepsilon}[2\zeta(v+\omega_1)+\zeta(t-v-\omega_1)-\zeta(t+v+\omega_1)];\end{aligned}$$

puis, en intégrant, on obtient, après quelques réductions faciles,

$$\Theta = (\mu a - i\varepsilon\zeta v)t - \frac{i\varepsilon}{2}\log\frac{\sigma_1(v-t)}{\sigma_1(v+t)}, \qquad e^{2i\varepsilon\Theta} = e^{2(i\mu a+\varepsilon\zeta v)\varepsilon t}\frac{\sigma_1(v-t)}{\sigma_1(v+t)}.$$

En multipliant l'expression de $e^{2i\varepsilon\Theta}$ par la dernière des expressions de R^2, extrayant les racines carrées et choisissant le signe de façon que, pour $t=0$, l'expression de $Re^{i\varepsilon\Theta}$ se réduise à R_0, on a enfin

$$Re^{i\varepsilon\Theta} = R_0 e^{(i\mu a\varepsilon+\zeta v)t}\frac{\sigma_1(v-t)}{\sigma_1 v\,\sigma_3 t};$$

le signe se conserve puisque le second membre reste continu et ne s'annule pas.

Cette dernière formule montre que, dans le plan (II), les coordonnées rectangulaires d'un point de l'herpolodie sont des fonctions univoques de t, et ce résultat peut, à la rigueur, dispenser de rechercher quelle détermination on doit donner au logarithme

dans l'expression de Θ. Au reste, cette recherche ne présente aucune difficulté si l'on applique la même méthode que dans le pendule sphérique. Pour $v = 2\omega_1 w$, $t = 2\omega_1 \text{T}$, on a

$$\frac{d\Theta}{d\text{T}} = \text{A} + \frac{1}{2i\varepsilon}\left[\frac{\mathfrak{S}_1'(\text{T} - w - \frac{1}{2})}{\mathfrak{S}_1(\text{T} - w - \frac{1}{2})} - \frac{\mathfrak{S}_1'(\text{T} + w - \frac{1}{2})}{\mathfrak{S}_1(\text{T} + w - \frac{1}{2})}\right],$$

où

$$\text{A} = 2\omega_1\mu b + \frac{1}{i\varepsilon}\frac{\mathfrak{S}_2' w}{\mathfrak{S}_2 w} = 2\omega_1\mu a + \frac{1}{i\varepsilon}\frac{\mathfrak{S}_1' w}{\mathfrak{S}_1 w}.$$

Lorsque T varie de 0 à 1, on en déduit

$$\Theta = \text{AT} + \varepsilon\pi + \varepsilon\frac{1}{2i}\log f(\text{T}),$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$f(\text{T}) = \frac{\mathfrak{S}_1(\text{T} - w - \frac{1}{2})}{\mathfrak{S}_1(\text{T} + w - \frac{1}{2})},$$

et où $\frac{1}{2i}\log f(\text{T})$ mesure l'angle négatif dont il faut faire tourner le vecteur allant de 0 à $\mathfrak{S}_1(\text{T} + w - \frac{1}{2})$ pour l'amener sur l'axe des quantités positives. Cet angle est obtus, droit ou aigu suivant que T est inférieur, égal ou supérieur à $\frac{1}{2}$; il est nul pour $\text{T} = 1$. Si donc on désigne par Θ_1 l'angle polaire du premier point de tangence J_1 de l'herpolodie avec le cercle de centre P et de rayon $\sqrt{l^2 - b^2}$, on a

$$\Theta_1 = \tfrac{1}{2}\text{A} + \tfrac{1}{2}\varepsilon\pi.$$

Pour $\text{T} = 1$, on obtiendra de même, pour l'angle polaire Θ_2 du premier point de tangence J_2 de l'herpolodie avec le cercle de centre P et de rayon $\sqrt{l^2 - a^2}$ (après le point J_0),

$$\Theta_2 = \text{A} + \varepsilon\pi = 2\Theta_1.$$

Lorsque T varie de n à $n+1$, n désignant un entier positif quelconque, on devra prendre dans l'expression précédente qui donne Θ en fonction de T,

$$\frac{1}{2i}\log f(\text{T}) = +n\pi + \frac{1}{2i}\log f(\text{T} - n),$$

où le logarithme qui figure dans le second terme du second membre est déterminé par ce qui précède, puisque $\text{T} - n$ est compris

entre 0 et 1. La symétrie de l'herpolodie par rapport à PJ_1 ou à PJ_2 s'établit comme dans l'étude de la courbe décrite par la projection de OM sur le plan des xy dans l'étude du pendule sphérique.

673. Il reste à déterminer, en fonction de t, les angles d'Euler ψ, θ, φ qui fixent la position du trièdre $Oxyz$, entraîné avec le corps, par rapport au trièdre fixe OXYZ. Nous choisirons l'axe OZ suivant la direction fixe du vecteur qui représente le moment des quantités de mouvement par rapport à O, et nous supposerons essentiellement que le trièdre OXYZ a la même disposition que le trièdre $Oxyz$; les neuf cosinus directeurs des axes Ox, Oy, Oz, par rapport aux axes OX, OY, OZ, sont suffisamment désignés par le Tableau :

	x	y	z
X....	α_1	α_2	α_3
Y....	β_1	β_2	β_3
Z....	γ_1	γ_2	γ_3

;

quant aux angles ψ, θ, φ, ce sont les angles dont il faut, pour l'amener sur le trièdre OXYZ, faire tourner le trièdre $Oxyz$: 1° autour de OZ, 2° autour d'une direction arbitrairement choisie OX_1 sur l'intersection des plans des xy et des XY, 3° autour de Oz; par ces rotations successives, le trièdre OXYZ occupe successivement les positions OX_1Y_1Z, OX_1Y_2Z, $Oxyz$, et l'on passe d'un système d'axes au suivant par les formules

$$\begin{aligned} X &= X_1\cos\psi - Y_1\sin\psi, & Y &= X_1\sin\psi + Y_1\cos\psi, \\ Y_1 &= Y_2\cos\theta - z\sin\theta, & Z &= Y_2\sin\theta + z\cos\theta, \\ X_1 &= x\cos\varphi - y\sin\varphi, & Y_2 &= x\sin\varphi + y\cos\varphi; \end{aligned}$$

l'élimination de X_1, Y_1, Y_2 entre ces formules fournit les expressions de X, Y, Z au moyen de x, y, z, et les expressions des neuf cosinus directeurs au moyen de θ, ψ, φ.

Les formules de Cinématique

$$p = \gamma_1 \frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \frac{d\theta}{dt}, \qquad q = \gamma_2 \frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \frac{d\theta}{dt}, \qquad r = \gamma_3 \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}$$

peuvent s'écrire immédiatement en envisageant la rotation représentée par le segment $O\Omega$ (rotation dont les composantes suivant les axes Ox, Oy, Oz sont p, q, r) comme résultant de la composition des trois rotations $\frac{d\psi}{dt}$ suivant OZ, $\frac{d\varphi}{dt}$ suivant Oz, $\frac{d\theta}{dt}$ suivant OX_1 et en appliquant le théorème des projections.

La détermination de ψ, θ, φ en fonction de t revient à l'intégration de ces trois équations différentielles linéaires où p, q, r sont maintenant des fonctions connues de t.

674. Les projections sur Ox, Oy, Oz de l'axe fixe des quantités de mouvement par rapport à O étant Ap, Bq, Cr, on a

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \sin\theta \sin\varphi = \frac{p}{a\mu} = i\sqrt{e_2 - e_3}\, \xi_{02} v\, \xi_{13} t, \\
\gamma_2 &= \sin\theta \cos\varphi = \frac{q}{b\mu} = -\varepsilon \sqrt{e_2 - e_3}\, \xi_{12} v\, \xi_{03} t, \\
\gamma_3 &= \cos\theta = \frac{r}{c\mu} = \xi_{32} v\, \xi_{23} t;
\end{aligned}$$

on tire de là

$$\sin^2\theta = 1 - \xi_{32}^2 v\, \xi_{23}^2 t = \frac{(e_2 - e_3)(p v - p t)}{(p v - e_2)(p t - e_3)} = (e_2 - e_3)\frac{\sigma(t+v)\,\sigma(t-v)}{\sigma_2^2 v\, \sigma_3^2 t};$$

cette expression ne s'annule pour aucune valeur de t; sa racine carrée, devant être continue, ne peut changer de signe; on devra donc donner à cette racine carrée le signe de la valeur initiale de $\sin\theta$, que nous supposerons positive : on peut, en effet, supposer toujours que l'angle θ_0 est compris entre o et π; il en sera alors toujours de même de l'angle θ, et l'on aura

$$\sin\theta = -\sqrt{e_2 - e_3}\, \frac{\left|\sqrt{\sigma(t+v)\,\sigma(t-v)}\right|}{\sigma_2 v\, \sigma_3 t};$$

dès lors $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ étant déterminés sans ambiguïté, il n'y a plus qu'à déterminer l'angle ψ, c'est-à-dire qu'à intégrer l'une des équations de la Cinématique, où tout est connu sauf $\frac{d\psi}{dt}$; il est

commode de se servir de la combinaison obtenue en multipliant la première par $\sin\varphi$, la seconde par $\cos\varphi$ et en ajoutant, ce qui donne

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\gamma_1\sin\varphi + \gamma_2\cos\varphi} = \mu\,\frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\dfrac{p}{a}\sin\varphi + \dfrac{q}{b}\cos\varphi},$$

puis, en remplaçant $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ dans le dernier membre par les quantités proportionnelles $\frac{p}{a}$, $\frac{q}{b}$,

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{d\psi}{dt} = \frac{\dfrac{p^2}{a} + \dfrac{q^2}{b}}{\dfrac{p^2}{a^2} + \dfrac{q^2}{b^2}};$$

les valeurs précédemment trouvées pour p, q donnent ensuite

$$\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} = a\,\frac{1-c}{a-1}\,\mu^2\xi_{03}^2\,t\left[pt - e_1 + \frac{b}{a}(e_1 - pv)\right],$$

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = \frac{1-c}{a-c}\,\mu^2\xi_{03}^2\,t(pt - pv),$$

d'où l'on conclut

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{d\psi}{dt} = a + \frac{1}{2i\varepsilon\mu}\,\frac{p'v}{pt - pv} = a - \frac{1}{2i\varepsilon\mu}[\zeta(t+v) - \zeta(t-v) - 2\zeta v],$$

puis, en intégrant, et en supposant que ψ soit nul pour $t = 0$,

$$\psi = t\left(\mu a + \frac{1}{i\varepsilon}\zeta v\right) - \frac{1}{2i\varepsilon}\log\frac{\sigma(v+t)}{\sigma(v-t)};$$

la détermination du logarithme donne lieu à des observations analogues à celles que l'on a développées dans la théorie du pendule sphérique et rappelées à propos de l'angle Θ; nous nous contenterons d'énoncer les résultats :

Si l'on pose

$$f_1(t) = \frac{\mathfrak{I}_1\left(\dfrac{v-t}{2\omega_1}\right)}{\mathfrak{I}_1\left(\dfrac{v+t}{2\omega_1}\right)},$$

on aura

$$\frac{1}{i}\log\frac{\sigma(v+t)}{\sigma(v-t)} = \frac{2\eta_1}{\omega_1}\,\frac{v}{i}\,t - \frac{1}{i}\log f_1(t),$$

et si $t = 2n\omega_1 + t'$, n étant entier et t' étant compris entre 0

et $2\omega_1$, on devra prendre

$$\frac{1}{i}\log f_1(t) = 2n\pi + \frac{1}{i}\log f_1(t'),$$

$\frac{1}{i}\log f_1(t')$ étant un nombre réel compris entre o et 2π; si t' est compris entre o et $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{i}\log f_1(t')$ est le double de l'angle positif aigu dont il faut faire tourner le vecteur qui va du point o au point $\mathfrak{S}_1\left(\frac{v+t'}{2\omega_1}\right)$ pour l'amener sur la partie positive de l'axe des quantités purement imaginaires; pour deux valeurs de t' également éloignées de ω_1, les deux valeurs de $\frac{1}{i}\log f(t')$ ont une somme égale à 2π; si n est un nombre entier, on a

$$\frac{1}{i}\log f_1(n\omega_1) = n\pi.$$

675. La solution peut être regardée comme achevée, puisque les neuf cosinus s'expriment au moyen de ψ, θ, φ. Hermite a toutefois donné pour ces neuf cosinus directeurs des expressions simples qu'il nous reste à faire connaître.

Calculons d'abord les valeurs initiales de ces cosinus, en faisant $t=0$ dans les expressions qui donnent $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, on trouve

$$\sin\theta_0 = i\sqrt{e_2-e_3}\,\xi_{02}v, \qquad \cos\theta_0 = \xi_{32}v, \qquad \sin\varphi_0 = 1, \qquad \cos\varphi_0 = 0;$$

on a ensuite, en affectant d'indices supérieurs o les valeurs initiales des cosinus, et se rappelant que $\psi_0 = 0$,

$$\alpha_1^0 = 0, \quad \alpha_2^0 = -1, \quad \alpha_3^0 = 0; \qquad \beta_1^0 = \cos\theta_0, \quad \beta_2^0 = 0, \quad \beta_3^0 = -\sin\theta_0;$$
$$\gamma_1^0 = \sin\theta_0, \quad \gamma_2^0 = 0, \quad \gamma_3^0 = \cos\theta_0.$$

Rappelons encore les formules de Cinématique

$$\alpha_1' = r\alpha_2 - q\alpha_3, \qquad \alpha_2' = p\alpha_3 - r\alpha_1, \qquad \alpha_3' = q\alpha_1 - p\alpha_2,$$

et celles qu'on en déduit par les permutations circulaires effectuées sur les lettres α, β, γ, permutations qui laissent invariables les quantités p, q, r aussi bien que les indices 1, 2, 3; dans ces formules, comme dans celles qui suivent, les accents indiquent les dérivées prises par rapport à t.

En utilisant ces relations, le fait bien connu que dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

chaque élément est égal au mineur correspondant, et les résultats déjà acquis, on trouve sans peine

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\log(\alpha_3 + i\varepsilon\beta_3) &= \frac{\alpha'_3 + i\varepsilon\beta'_3}{\alpha_3 + i\varepsilon\beta_3} = \frac{\alpha_3\alpha'_3 + \beta_3\beta'_3 + i\varepsilon(\alpha_3\beta'_3 - \alpha'_3\beta_3)}{\alpha_3^2 + \beta_3^2} \\ &= \frac{-\gamma_3\gamma'_3 + i\varepsilon(p\gamma_1 + q\gamma_2)}{1 - \gamma_3^2} = \frac{-\dfrac{rr'}{\mu^2 c^2}}{1 - \dfrac{r^2}{\mu^2 c^2}} + i\varepsilon\mu\frac{\dfrac{p^2}{a} + \dfrac{q^2}{b^2}}{\dfrac{p^2}{a^2} + \dfrac{q^2}{b^2}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\log\left(1 - \frac{r^2}{\mu^2 c^2}\right) + i\varepsilon\frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt}\log\sin\theta + i\varepsilon\frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}$$

En intégrant entre les limites o et t, et en se rappelant que pour $t = 0$, $\alpha_3 + i\varepsilon\beta_3$ doit se réduire à

$$-i\varepsilon\sin\theta_0 = \varepsilon\sqrt{e_2 - e_3}\,\xi_{02}v,$$

ce qui détermine la constante d'intégration, on parvient aisément à la formule

$$\alpha_3 + i\varepsilon\beta_3 = \varepsilon\sqrt{e_2 - e_3}\,\frac{\sigma(v - t)}{\sigma_2 v\,\sigma_3 t}\,e^{(i\varepsilon\mu a - \zeta v)t}.$$

En changeant i en $-i$ dans cette formule, ce qui change v de signe, on obtient

$$\alpha_3 - i\varepsilon\beta_3 = -\varepsilon\sqrt{e_2 - e_3}\,\frac{\sigma(v + t)}{\sigma_2 v\,\sigma_3 t}\,e^{-(i\varepsilon\mu a + \zeta v)t};$$

en sorte que α_3 et β_3 sont entièrement déterminés.

On a ensuite

$$\begin{aligned} \alpha_2 + i\varepsilon\beta_2 &= \frac{-\gamma_2\gamma_3 - \gamma_1 i\varepsilon}{\alpha_3 - i\varepsilon\beta_3} \\ &= [\xi_{12}v\,\xi_{32}v\,\xi_{03}t\,\xi_{23}t + \xi_{02}v\,\xi_{13}t]\,\frac{\sigma_2 v\,\sigma_3 t}{-\sigma(v + t)}\,e^{(i\varepsilon\mu a + \zeta v)t} \\ &= \frac{\sigma_1 v\,\sigma_3 v\,\sigma t\,\sigma_2 t + \sigma v\,\sigma_2 v\,\sigma_1 t\,\sigma_3 t}{-\sigma_2 v\,\sigma_3 t\,\sigma(v + t)}\,e^{(i\varepsilon\mu a + \zeta v)t}, \end{aligned}$$

et, par conséquent, en tenant compte de la formule (XV_4),

$$\alpha_2 + i\varepsilon\beta_2 = -\frac{\sigma_2(v-t)}{\sigma_2 v\,\sigma_3 t}\, e^{(i\varepsilon\mu a + \zeta v)t},$$

$$\alpha_2 - i\varepsilon\beta_2 = -\frac{\sigma_2(v+t)}{\sigma_2 v\,\sigma_3 t}\, e^{-(i\varepsilon\mu a + \zeta v)t}.$$

De même

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + i\varepsilon\beta_1 &= \frac{-\gamma_1\gamma_2 - i\varepsilon\gamma_3}{\alpha_2 - i\varepsilon\beta_2} \\
&= i\varepsilon\,[(e_3 - e_2)\,\xi_{02}v\,\xi_{12}v\,\xi_{03}t\,\xi_{13}t + \xi_{32}v\,\xi_{23}t]\,\frac{\sigma_2 v\,\sigma_3 t}{\sigma_2(v+t)}\, e^{(i\varepsilon\mu a + \zeta v)t} \\
&= i\varepsilon\,\frac{(e_3 - e_2)\,\sigma v\,\sigma_1 v\,\sigma t\,\sigma_1 t + \sigma_2 v\,\sigma_3 v\,\sigma_2 t\,\sigma_3 t}{\sigma_2(v+t)\,\sigma_2 v\,\sigma_3 t}\, e^{(i\varepsilon\mu a + \zeta v)t},
\end{aligned}$$

ou, en tenant compte de la formule (XV_5),

$$\alpha_1 + i\varepsilon\beta_1 = \quad i\varepsilon\,\frac{\sigma_3(v-t)}{\sigma_2 v\,\sigma_3 t}\, e^{(i\varepsilon\mu a + \zeta v)t},$$

$$\alpha_1 - i\varepsilon\beta_1 = -\,i\varepsilon\,\frac{\sigma_3(v+t)}{\sigma_2 v\,\sigma_3 t}\, e^{-(i\varepsilon\mu a + \zeta v)t}.$$

CHAPITRE II.

PREMIÈRES APPLICATIONS A L'ALGÈBRE ET A L'ARITHMÉTIQUE.

§ I. — Division des périodes par un nombre entier.

676. Nous allons nous occuper du problème qui consiste à trouver, quand on se donne g_2 et g_3, ou k, les valeurs de $p a_{p,q}$ ou $\operatorname{sn} a_{p,q}$, où l'on a posé suivant les cas

$$a_{p,q} = \frac{2p\omega_1 + 2q\omega_3}{n}, \qquad a_{p,q} = \frac{2p\mathrm{K} + 2qi\mathrm{K}'}{n},$$

en désignant par n un entier positif donné et par p, q des entiers quelconques, tels toutefois que $2p$, $2q$ ne soient pas tous les deux divisibles par n. Ce problème se relie au problème de la transformation d'une part, et, d'autre part, à la recherche des valeurs de $p\frac{u}{n}$, $\operatorname{sn}\frac{u}{n}$ quand on se donne pu, $\operatorname{sn} u$, c'est-à-dire au problème de la division de l'argument; pour $g_2 = 4$, $g_3 = 0$, il est, d'ailleurs, identique au problème de la division de la lemniscate dont nous nous occuperons plus loin.

Le problème ne se présente pas pour $n = 2$; il a été complètement résolu pour $n = 4$ (n^{os} **117**, **334**); nous réunissons ici les formules que l'on a obtenues; les signes supérieur et inférieur se correspondent dans les deux membres d'une même équation :

$$p\frac{\omega_1}{2} = e_1 + (e_1 - e_3)k', \quad p\frac{\omega_2}{2} = e_3 - (e_1 - e_3)k', \quad p\frac{\omega_3 \pm \omega_1}{2} = e_2 \mp i(e_1 - e_3)kk',$$

$$\operatorname{sn}\frac{\mathrm{K}}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}, \qquad \operatorname{sn}\frac{i\mathrm{K}'}{2} = \frac{i}{\sqrt{k}}, \qquad \operatorname{sn}\frac{\mathrm{K} \pm i\mathrm{K}'}{2} = \frac{\sqrt{1+k} \pm i\sqrt{1-k}}{2\sqrt{k}},$$

$$\operatorname{cn}\frac{\mathrm{K}}{2} = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}, \qquad \operatorname{cn}\frac{i\mathrm{K}'}{2} = \frac{\sqrt{1+k}}{k}, \qquad \operatorname{cn}\frac{\mathrm{K} \pm i\mathrm{K}'}{2} = \frac{1 \mp i}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}},$$

$$\operatorname{dn}\frac{\mathrm{K}}{2} = \sqrt{k'}, \qquad \operatorname{dn}\frac{i\mathrm{K}'}{2} = \sqrt{1+k}, \qquad \operatorname{dn}\frac{\mathrm{K} \pm i\mathrm{K}'}{2} = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+k'} \mp i\sqrt{1-k'}).$$

677. D'une façon générale, les valeurs de $pa_{p,q}$ sont racines d'une équation $f(y)=0$ de degré $\frac{n^2-1}{2}$ ou $\frac{n^2-4}{2}$, suivant que n est impair ou pair, équation que l'on a appris à former aux n°s 456, ..., 460 et dont on obtient, suivant les cas, le premier membre en remplaçant pu par z dans $\Psi_n(u)$ ou dans $\frac{1}{p'u}\Psi_n(u)$ (CIV); suivant que n est impair ou pair, la première ou la seconde de ces expressions est un polynome en pu dont les coefficients sont des polynomes entiers en g_2, g_3 à coefficients numériques rationnels. Quant à l'équation $F(z)$ dont les racines sont les valeurs non nulles de $\operatorname{sn}^2 a_{p,q}$, elle se déduit immédiatement de la précédente; en regardant pour un instant K et K′ comme des fonctions de τ, puis en prenant $\omega_1=K$, $\omega_3=iK'$, et, par suite, $\sqrt{e_1-e_3}=1$,

$$p(u\,|\,K, iK')=\frac{1}{\operatorname{sn}^2(u\,|\,\tau)}-\frac{1+k^2}{3} \text{ [1]},$$

en sorte que l'équation $F(z)=0$ résulte de l'élimination de y entre les deux relations

$$f(y)=0, \quad y=\frac{1}{z}-\frac{1+k^2}{3};$$

on a alors

$$g_2=\frac{4}{3}(k^4-k^2+1), \qquad g_3=\frac{4}{27}(2k^6-3k^4-3k^2+2),$$

et les coefficients de l'équation $F(z)=0$ sont évidemment des polynomes en k^2 à coefficients numériques rationnels.

Nous nous occuperons exclusivement, dans ce qui suit, du cas où $n=2\nu+1$ est un nombre premier impair; l'équation $f(y)=0$ est alors de degré $\frac{1}{2}(n^2-1)=2\nu(\nu+1)$. Puisque ses coefficients sont rationnels en g_2, g_3, elle ne change pas quand on remplace ω_1, ω_3 par $\Omega_1=\alpha\omega_1+\beta\omega_3$, $\Omega_3=\gamma\omega_1+\delta\omega_3$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des entiers qui vérifient la relation $\alpha\delta-\beta\gamma=1$: en effet, ces substitutions ne changent ni les quantités g_2, g_3, ni la fonction pu. De même l'équation $F(z)=0$, de degré $2\nu(\nu+1)$ en z, ne change pas quand on remplace τ par $\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des entiers qui vérifient la condition $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, les nombres α, δ étant en outre

---

[1] (XCVI) Cf. *Nouv. Ann. de Mathém.*, 3e sér., t. XIX, p. 2.

assujettis à être impairs, et les nombres β, γ étant pairs, puisque ces substitutions ne changent ni k^2, ni $\mathrm{sn}^2 u$.

678. Appelons *élément* un couple de nombres entiers (p, q) rangés dans un ordre déterminé et qui ne soient pas tous deux divisibles par n. Nous dirons que deux éléments (p, q), (p', q') sont *indistincts* lorsque les deux nombres $p-p'$, $q-q'$ ou les deux nombres $p+p'$, $q+q'$ sont divisibles par n, en sorte que l'on ait $\wp(a_{p,q}) = \wp(a_{p',q'})$. On observera que l'on peut toujours remplacer un élément donné (p, q) par un élément (p', q') qui n'en soit pas distinct, et dans lequel p', q' soient premiers entre eux; on peut même imposer, en outre, à p', q' la condition de donner comme restes, pour un module quelconque a, premier à n, des nombres ε, η arbitrairement choisis, pourvu que l'un d'eux soit premier à a. Rappelons, en effet, que la forme $\mathrm{A}x + \mathrm{B}$, où A et B sont des entiers fixes et x un entier variable, peut représenter une infinité de nombres premiers à un nombre entier quelconque C premier à A; on obtient l'un d'eux en choisissant x de manière que le reste de la division de $\mathrm{A}x + \mathrm{B}$ par C soit 1 ou un nombre quelconque premier à C; ceci posé, on déterminera deux entiers λ_0, μ_0 qui vérifient les congruences

$$p + \lambda n \equiv \varepsilon, \qquad q + \mu n \equiv \eta \qquad (\mathrm{mod.}\, a);$$

toutes les solutions de ces congruences sont de la forme

$$\lambda = \lambda_0 + a x, \qquad \mu = \mu_0 + a y,$$

x et y étant des entiers arbitraires; on prendra

$$p' = p + \lambda_0 n + a n x, \qquad q' = q + \mu_0 n + a n y;$$

l'un des nombres $p + \lambda_0 n$, $q + \mu_0 n$ est, par hypothèse, premier à a; supposons que ce soit $p + \lambda_0 n$; si p n'est pas divisible par n, p' sera premier à an quel que soit x que l'on fixera arbitrairement; on choisira ensuite y de manière que q' soit premier à p'; si $p = \lambda_1 n$ est divisible par n, $\lambda_1 + \lambda_0 + a x$ sera premier à a quel que soit x; on choisira x de manière que $\lambda_1 + \lambda_0 + a x$ soit premier à n et, par suite, à an; puis, en observant que q est certainement, dans le cas présent, premier à n et qu'il en est de même de q', quel que soit y, on choisira y de manière que q' soit premier

à $\lambda_1 + \lambda_0 + ax$, et, par conséquent, à $p' = n(\lambda_1 + \lambda_0 + ax)$. On peut, par exemple, supposer $p' \equiv 1$, $q' \equiv 0 \pmod{16}$.

Il y a $2\nu(\nu+1)$ éléments distincts, qu'on obtient, par exemple (n° 458), en donnant à p la valeur 0 et à q les valeurs $1, 2, \ldots, \nu$, à p l'une des valeurs $1, 2, \ldots, \nu$ et à q les valeurs $-\nu, -\nu+1, \ldots, 0, \ldots, \nu-1, \nu$. Nous appellerons *système complet* le Tableau formé par $2\nu(\nu+1)$ éléments distincts.

679. En désignant toujours par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des entiers qui vérifient la relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, nous dirons que l'élément

$$(\alpha p + \gamma q, \beta p + \delta q)$$

est le *transformé* de l'élément (p, q) par la substitution

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Deux éléments (p, q), (p', q') transformés par une même substitution S donnent des éléments distincts ou non, suivant que les éléments (p, q), (p', q') sont eux-mêmes distincts ou non. Si l'on transforme tous les éléments du système complet, par la substitution S, on reproduit le système complet.

Parmi les substitutions S nous distinguerons les substitutions $\Sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers qui satisfont aux conditions suivantes : $\alpha\delta - \beta\gamma$ est égal à 1, β est pair et l'on a, en outre, $\alpha \equiv \delta \equiv 1$, $\gamma \equiv 0 \pmod{16}$. L'intérêt d'une telle substitution consiste en ce que la substitution de $\dfrac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}$ à τ ne change ni $\varphi(\tau) = \sqrt[4]{k(\tau)}$, ni la fonction $\operatorname{sn}(u \mid \tau)$ et qu'elle change K, iK' respectivement en $\alpha K + i\beta K'$, $\gamma K + i\delta K'$ (XLVII, LXXX). La substitution inverse d'une substitution Σ et le produit $\Sigma\Sigma'$ de deux substitutions (n^{os} 146, 147) qui satisfont aux conditions précédentes sont eux-mêmes des substitutions qui satisfont à ces conditions ; les substitutions Σ forment un groupe.

680. Étant donnés deux éléments distincts, on peut trouver une substitution Σ telle que le premier élément, transformé par cette substitution, devienne le second élément, ou plutôt n'en soit pas distinct. Supposons que le premier élément soit (0, 1) et soit

(p, q) le second élément; $(0, 1)$ transformé par Σ devient (γ, δ); il est permis, en remplaçant au besoin (p, q) par un élément qui n'en soit pas distinct, de supposer p, q premiers entre eux, puis $p \equiv 0$, $q \equiv 1 \pmod{16}$; on prendra $\gamma = p$, $\delta = q$, puis, en désignant par α_0, β_0 une solution entière de l'équation $q\alpha - p\beta = 1$, on devra prendre $\alpha = \alpha_0 + \lambda p$, $\beta = \beta_0 + \lambda q$; on choisira l'entier λ de façon que β soit pair; la condition $q\alpha - p\beta = 1$, qui est toujours vérifiée, montre, d'ailleurs, que l'on a $\alpha \equiv 1 \pmod{16}$; toutes les conditions imposées pour que la substitution S soit une substitution Σ sont alors vérifiées. La substitution Σ^{-1}, inverse de Σ, transformerait l'élément (p, q) en $(0, 1)$, et une nouvelle substitution Σ' du même type transformerait l'élément $(0, 1)$ en un autre élément arbitraire (p', q'); la substitution composée $\Sigma'\Sigma^{-1}$, qui appartient toujours au même type, transformerait donc l'élément (p, q) en (p', q') [1].

681. Les ν éléments (rp, rq), où $r = 1, 2, \ldots, \nu$, sont distincts; nous dirons qu'ils *appartiennent à une même ligne*. En donnant à r une valeur fixe et à r' les valeurs $1, 2, \ldots, \nu$, les éléments $(rr'p, rr'q)$ reproduisent la ligne à laquelle appartient

---

[1] Si l'on veut s'occuper de l'équation qui a pour racines les valeurs non nulles de $\operatorname{sn}(a_{p,q})$, et non les carrés de ces valeurs, il est nécessaire de modifier un peu ce qui précède et, en particulier, la définition de deux éléments indistincts; deux éléments (p, q), (p', q') seront indistincts si l'on a

$$\operatorname{sn}(a_{p,q}) = \operatorname{sn}(a_{p',q'}),$$

c'est-à-dire soit

$$p' - p \equiv 0 \pmod{2n}, \qquad q' - q \equiv 0 \pmod{n},$$

soit

$$p' + p \equiv 0 \pmod{2n}, \qquad q' + q \equiv 0 \pmod{n};$$

le cas où p, q seraient tous deux divisibles par n est toujours exclu. Les dernières congruences montrent que l'on peut, si l'on veut, supposer p impair. Le Tableau des éléments distincts contient alors $n^2 - 1 = 4\nu(\nu + 1)$ éléments. Deux éléments restent distincts ou indistincts quand on les transforme par une substitution Σ. En modifiant légèrement la démonstration du texte (n° 678), on reconnaît aisément que l'on peut remplacer un élément (p, q) par un élément (p', q') qui n'en soit pas distinct, et pour lequel on aura

$$p' \equiv 1, \qquad q' \equiv 0 \pmod{16}.$$

Dès lors, on voit de suite qu'il y a toujours une substitution Σ qui transforme un élément donné en un élément donné, pourvu, bien entendu, qu'on ne distingue pas les éléments indistincts.

l'élément (p, q), car les valeurs absolues des restes minimums des nombres rr' (mod. n) sont les nombres $1, 2, \ldots, \nu$. Un élément détermine la ligne à laquelle il appartient. Le Tableau (T) des éléments du système complet, rangés en lignes, contient $2(\nu+1)$ lignes. Les éléments d'une même ligne, transformés par la substitution S, restent les éléments d'une même ligne. Deux éléments (p, q), (p_1, q_1) appartiennent ou non à la même ligne, suivant que le déterminant $pq_1 - p_1 q$ est, ou non, divisible par n; il suffit évidemment de démontrer que, $pq_1 - p_1 q$ étant supposé divisible par n, les deux éléments (p, q), (p_1, q_1) appartiennent à la même ligne; or, si p est divisible par n, il en est alors de même de p_1, puisque q et p_1 ne sont pas à la fois divisibles par n; on en conclut de suite que (p, q), (p_1, q_1) appartiennent à la même ligne formée des éléments $(0, 1)$, $(0, 2)$, ..., $(0, \nu)$; si p est, au contraire, premier à n, il existe deux entiers r, s tels que l'on ait $p_1 = pr + ns$, et l'on aura

$$pq_1 - p_1 q = pq_1 - (pr+ns)q \equiv p(q_1 - qr) \equiv 0 \pmod{n};$$

d'où l'on conclut que $q_1 - qr$ est divisible par n, comme $p_1 - pr$, et que les éléments (p, q), (p_1, q_1) appartiennent donc à la même ligne.

682. Il existe une substitution Σ qui transforme deux lignes différentes, arbitrairement choisies dans le Tableau (T) en deux lignes différentes, choisies elles-mêmes arbitrairement. En vertu du raisonnement employé à la fin du n° 680, il suffira de démontrer la proposition en partant des deux lignes

$$\begin{array}{llll} (0,1), & (0,2), & \ldots, & (0,\nu), \\ (1,0), & (2,0), & \ldots, & (\nu,0), \end{array}$$

qui deviennent, si l'on en transforme les éléments par la substitution Σ,

$$\begin{array}{llll} (\gamma,\delta), & (2\gamma,2\delta). & \ldots, & (\nu\gamma,\nu\delta). \\ (\alpha,\beta), & (2\alpha,2\beta), & \ldots, & (\nu\alpha,\nu\beta); \end{array}$$

nous voulons que ces deux lignes coïncident respectivement avec celles qui contiennent les éléments (p, q), (r, s).

Ayant choisi p, q premiers entre eux tels que l'on ait $p \equiv 0$, $q \equiv 1$ (mod. 16), nous prenons d'abord $\gamma = p$, $\delta = q$; nous devons

prendre ensuite $\alpha = \lambda r + an$, $\beta = \lambda s + bn$, en désignant par a, b, λ des entiers, de manière à vérifier d'abord la condition

$$q\alpha - p\beta = 1,$$

qui entraîne

$$(qr - ps)\lambda + n(qa - pb) = 1;$$

$qr - ps$ est premier à n, puisque les deux éléments (p, q), (r, s) appartiennent à deux lignes distinctes; on peut donc déterminer les entiers λ, μ tels que l'on ait

$$(qr - ps)\lambda + n\mu = 1,$$

puis, les entiers p, q étant premiers entre eux, déterminer les entiers a, b de façon que l'on ait

$$qa - pb = \mu.$$

Si a_0, b_0 sont une solution de cette équation, on prendra

$$\alpha = \lambda r + n(a_0 + px), \qquad \beta = \lambda s + n(b_0 + qx),$$

x étant un entier que l'on choisira de façon que β soit pair, ce qui est toujours possible, puisque nq est impair; alors, à cause de la relation $\alpha q - \beta p = 1$, on aura $\alpha \equiv 1 \pmod{16}$.

683. Ces considérations arithmétiques vont nous fournir des renseignements précieux sur les équations que vérifient les quantités $\operatorname{sn}^2(a_{p,q})$, $\wp(a_{p,q})$. Nous raisonnerons sur la première; les raisonnements se simplifient pour la seconde, en ce sens qu'on n'a pas besoin de tenir compte des conditions imposées à α, β, γ, δ en dehors de la relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Fixons un corps [1] Ω, formé au moyen d'éléments numériques quelconques et de la fonction $\varphi(\tau)$ et considérons une équation $f(z) = 0$, entière en z, dont les coefficients appartiennent au

---

[1] Un *corps*, ou *domaine de rationalité*, est un *ensemble* de nombres, constants ou variables, tels que, si deux éléments figurent dans cet ensemble, la somme, le produit, le quotient de ces deux éléments y figurent aussi. Tous les nombres rationnels figurent dans un corps quelconque. On pourra, si l'on veut, supposer que le corps Ω comprend seulement tous les nombres rationnels et toutes les fonctions rationnelles de $\varphi(\tau)$ à coefficients numériques rationnels.

corps Ω, et qui soit vérifiée quand on y remplace z par

$$\operatorname{sn}^2(a_{p,q}) = \operatorname{sn}^2 \frac{2pK + 2iqK'}{n},$$

où p, q sont deux entiers donnés, non divisibles tous deux par n; il faut entendre par là que la fonction analytique de τ, $f[\operatorname{sn}^2(a_{p,q}), \varphi]$, où τ entre dans φ, dans sn, dans K et dans K$'$, est identiquement nulle. Si, dans cette fonction, on remplace τ par $\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}$, où $\Sigma = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ est une substitution qui satisfait aux conditions précisées plus haut (n° 679), φ ne change pas, non plus que la fonction $\operatorname{sn} u$ qui reste la même fonction de u, et $a_{p,q}$ est remplacé par $a_{p',q'}$ en désignant par (p', q') le transformé par Σ de l'élément (p, q); on voit donc que $f[\operatorname{sn}^2(a_{p',q'}), \varphi]$ est toujours nul. Comme (p', q') peut coïncider avec n'importe quel élément du système complet, on voit que l'équation $f(z, \varphi) = 0$, du moment qu'elle admet pour racine une des valeurs de $\operatorname{sn}^2(a_{p,q})$, les admet toutes.

Soit maintenant $F(z) = 0$ l'équation même que l'on a appris à former au n° 677 et qui a pour racines les valeurs non nulles de $\operatorname{sn}^2(a_{p,q})$; ses coefficients appartiennent au corps Ω. Il est impossible que $F(z)$ admette un diviseur entier en z dont les coefficients appartiennent au corps Ω. Si l'on avait, en effet, une identité de la forme

$$F(z) = f_1(z) f_2(z) \ldots,$$

où $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... seraient de tels diviseurs, chacun de ces polynomes deviendrait une fonction analytique univoque de τ, quand on y remplacerait z par $\operatorname{sn}^2(a_{p,q})$; leur produit $F(z)$ étant nul identiquement, l'un d'eux, $f_1(z)$, par exemple, serait aussi identiquement nul; il admettrait donc la racine $\operatorname{sn}^2 a_{p,q}$ et, par suite, toutes les $2\nu(\nu+1)$ racines de $F(z)$; il serait donc identique à $F(z)$ à un facteur constant près appartenant au corps Ω; l'équation $F(z) = 0$ est donc irréductible dans le corps Ω [1].

---

[1] Si l'on considère l'équation $F(x^2) = 0$, obtenue en remplaçant z par x^2, et qui a pour racines les valeurs non nulles de $\operatorname{sn} a_{p,q}$, on reconnaît de même, en utilisant les remarques contenues dans la note du n° 680, qu'elle est irréductible dans le même corps.

684. Ceci posé, envisageons une fonction symétrique rationnelle $S(z_1, z_2, \ldots, z_\nu)$ de ν variables $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ dont les coefficients appartiennent au corps Ω; remplaçons-y pour $r = 1, 2, \ldots, \nu$ la variable z_r par la fonction rationnelle [1] de $\operatorname{sn}^2 u$ qu'est $\operatorname{sn}^2 ru$, puis $\operatorname{sn}^2 u$ par z, et désignons par $R(z)$ la fonction de z ainsi obtenue. Cette fonction $R(z)$ prend la même valeur quand on y remplace z par l'une quelconque des ν valeurs de

$$\operatorname{sn}^2(ra_{p,q}) = \operatorname{sn}^2(a_{rp,rq}) \qquad (r = 1, 2, \ldots, \nu),$$

c'est-à-dire par l'une quelconque des ν racines de $F(z) = 0$ qui correspondent aux éléments d'une même ligne du système complet : l'expression

$$R(\operatorname{sn}^2 a_{p,q}) \quad \text{ou} \quad S(\operatorname{sn}^2 a_{p,q}, \operatorname{sn}^2 a_{2p,2q}, \ldots, \operatorname{sn}^2 a_{\nu p,\nu q})$$

est égale à

$$R(\operatorname{sn}^2 a_{rp,rq}) \quad \text{ou} \quad S(\operatorname{sn}^2 a_{rp,rq}, \operatorname{sn}^2 a_{2rp,2rq}, \ldots, \operatorname{sn}^2 a_{\nu rp,\nu rq}),$$

puisque les nombres $rp, 2rp, \ldots, \nu rp$ sont congrus (mod. n) aux nombres $\pm p, \pm 2p, \ldots, \pm \nu p$, que les nombres $rq, 2rq, \ldots, \nu rq$ sont congrus (mod. n) aux nombres $\pm q, \pm 2q, \ldots, \pm \nu q$, et que la fonction S est une fonction symétrique de ses éléments. La fonction $R(z)$, quand on y remplace z par les $2\nu(\nu+1)$ racines de $F(z)$, n'est donc susceptible que de $2(\nu+1) = n+1$ valeurs au plus; nous allons montrer qu'elle en a exactement $n+1$, à moins de se réduire à un élément de Ω.

Supposons, en effet, que l'on ait

$$R(\operatorname{sn}^2 a_{p,q}) = R(\operatorname{sn}^2 a_{p',q'}),$$

quoique les éléments (p, q), (p', q') appartiennent à deux lignes distinctes; en remplaçant τ par $\frac{\gamma - \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}$, où $\Sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ appartient au type défini plus haut (n° 679), et en désignant par (p_1, q_1), (p'_1, q'_1) les transformés par Σ des éléments (p, q), (p', q'), on aurait encore

$$R(\operatorname{sn}^2 a_{p_1,q_1}) = R(\operatorname{sn}^2 a_{p'_1,q'_1});$$

mais, comme les éléments (p_1, q_1), (p'_1, q'_1) peuvent appartenir

---

[1] Les coefficients de cette fonction rationnelle sont des fonctions entières, à coefficients numériques rationnels, de $\varphi(\tau)$.

à telle ligne que l'on voudra (n° 682), il en résulterait que la fonction $R(z)$ ne saurait prendre deux valeurs distinctes pour deux racines de l'équation $F(z) = 0$, quel que soit le choix que nous fassions de ces deux racines; la valeur unique de $R(z)$ serait donc un élément de Ω.

Si nous écartons ce cas, on peut donc dire que par la transformation $y = R(z)$, l'équation $F(z) = 0$ se réduit nécessairement à une équation $G(y) = 0$ de degré $(n+1)$, dont les coefficients appartiennent au corps Ω; elle est irréductible dans ce corps; elle a pour racines les $(n+1)$ valeurs $y_0, y_1, \ldots, y_n$ que prend $R(z)$ quand on y remplace z par $\operatorname{sn}^2 a_{p,q}$ et (p, q) par $n+1$ éléments appartenant aux $n+1$ lignes distinctes du système complet; chacune des racines correspond à une ligne de ce système complet.

Si y_s est une de ces racines, les deux équations

$$F(z) = 0, \qquad y_s = R(z)$$

ont ν racines communes, à savoir les ν racines $z_{1,s}, z_{2,s}, \ldots, z_{\nu,s}$ de $F(z) = 0$ qui correspondent à la même ligne que y_s; ces ν racines dépendront d'une équation $g(z; y_s) = 0$, que l'on obtiendra en cherchant le plus grand commun diviseur de $F(z)$ et de $R(z) - y_s$, en sorte que les coefficients de $g(z; y_s)$, envisagée comme une fonction de z, sont des fonctions rationnelles de y_s et des éléments du corps Ω; en d'autres termes, ces coefficients appartiennent au corps Ω_s formé en *adjoignant* y_s au corps Ω.

Dans ce corps Ω_s, l'équation en z, $f(z; y_s) = 0$, est, d'ailleurs, résoluble par radicaux; il est aisé de voir qu'elle appartient même au type le plus simple des équations résolubles par radicaux, car elle est *cyclique*. En effet, si λ est une racine primitive du nombre premier n, les valeurs absolues des restes minimums (mod. n) des nombres $\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^\nu$ sont les nombres $1, 2, \ldots, \nu$ rangés dans un certain ordre; de plus, $\lambda^{\nu+1}$ est congru à λ. Il résulte de là que chaque élément d'une ligne s'obtient en multipliant les deux termes de l'élément précédent par λ, et qu'on reproduit le premier élément en multipliant le dernier par λ. Si donc on représente, pour un instant, par $\theta(\operatorname{sn}^2 u)$ la fonction *rationnelle* de $\operatorname{sn}^2 u$ qu'est $\operatorname{sn}^2(\lambda u)$, fonction dont les coefficients sont des fonctions entières de $\varphi(\tau)$ à coefficients numériques rationnels, on voit que les racines $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ de l'équation $g(z, y_s) = 0$

peuvent être rangées dans un ordre tel que l'on ait

$$z_2 = \theta(z_1), \quad z_3 = \theta(z_2), \quad \ldots, \quad z_\nu = \theta(z_{\nu-1}), \quad z_1 = \theta(z_\nu);$$

c'est le caractère des équations cycliques.

Observons encore que si $y' = \mathrm{R}'(z)$ est une autre fonction de z formée comme $\mathrm{R}(z)$ l'a été, et si l'on désigne par $y'_0, y'_1, \ldots, y'_n$ les valeurs de $y' = \mathrm{R}'(z)$ qui correspondent respectivement aux mêmes lignes du système complet que les valeurs $y_0, y_1, \ldots, y_n$ de $y = \mathrm{R}(z)$, il existe une relation de la forme

$$y'_s = \Psi(y_s) \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

où Ψ désigne une fonction rationnelle de y_s dont les coefficients appartiennent au corps Ω_s; en effet, l'expression $\mathrm{R}'(z)$ conserve la même valeur y'_s pour toutes les racines $z_{1,s}, z_{2,s}, \ldots, z_{\nu,s}$ de l'équation en z, $g(z, y_s) = 0$; et $y'_s = \frac{1}{\nu}\sum_{r=1}^{r=\nu} \mathrm{R}(z_{r,s})$ est évidemment une fonction rationnelle (dans Ω) des coefficients de l'équation $g(z, y_s)$, c'est-à-dire de y_s.

685. Des résultats tout pareils concernent l'équation $f(y) = 0$ dont les racines sont les valeurs de $pa_{p,q}$; au lieu du corps Ω on considérera toutefois un corps Ω' formé au moyen d'éléments numériques quelconques et des quantités g_2, g_3.

L'équation $f(y) = 0$ est irréductible dans le corps Ω'. Une fonction symétrique (ou même cyclique) des quantités $pa_{p,q}$ relatives à une même ligne et dont les coefficients appartiennent au corps Ω', est racine d'une équation de degré $n+1$, dont les coefficients appartiennent à ce corps, et cette équation est irréductible dans ce corps si les valeurs de la fonction symétrique (ou cyclique) considérée changent quand on passe d'une ligne à l'autre. Toute autre fonction symétrique (ou cyclique) des mêmes quantités $pa_{p,q}$ qui garde la même valeur pour les éléments d'une même ligne, et dont les coefficients appartiennent au corps Ω', est alors fonction rationnelle de la première.

Une racine de l'équation irréductible de degré $(n+1)$ correspond à une ligne du système complet d'éléments et les $\frac{n-1}{2}$ valeurs de $pa_{p,q}$ pour les éléments de cette ligne sont racines d'une

équation de degré $\frac{n-1}{2}$ dont les coefficients appartiennent au corps Ω'_s obtenu en adjoignant cette racine à Ω'. Dans le corps Ω'_s, l'équation de degré $\frac{n-1}{2}$ est irréductible.

686. Parmi les fonctions symétriques des quantités $p a_{p,q}$ relatives à une même ligne, qu'il convient d'employer, la somme $P = \Sigma p a_{p,q}$ se présente d'autant plus naturellement qu'elle figure déjà dans les formules de transformation (XXI). Il resterait, il est vrai, à prouver, pour pouvoir affirmer que P vérifie une équation irréductible de degré $n+1$, que P change de valeur quand on passe d'une ligne à l'autre; dans les cas particuliers où $n = 3, 5$, que nous examinerons plus loin, l'irréductibilité de l'équation en P, du quatrième ou du sixième degré, apparaît toutefois directement sur l'équation même et le changement des valeurs de P quand on passe d'une ligne à l'autre en résulte.

M. Kiepert a montré que, pour $n > 3$, la fonction

$$R = \prod_{r=1}^{r=\nu} [p(r a_{p,q}) - p(2 r a_{p,q})],$$

où $\nu = \frac{n-1}{2}$, était particulièrement avantageuse. On reconnaît de suite qu'elle est une fonction symétrique rationnelle des ν quantités $p(r a_{p,q})$, puisque $p(2 r a_{p,q})$ est une fonction rationnelle de g_2, g_3, $p(r a_{p,q})$, en sorte que R peut être mis sous la forme

$$\prod_{r=1}^{r=\nu} F[p(r a_{p,q})],$$

F désignant une fonction rationnelle de $p(r a_{p,q})$ [1].

---

[1] R peut être mis sous une forme intéressante que le lecteur retrouvera sans peine en reprenant les formules des nos 372, 373 (voir l'*Errata*). On a, en continuant à désigner $\frac{n-1}{2}$ par ν, et en écrivant $R_{p,q}$ au lieu de R,

$$R_{p,q} = (-1)^\nu \prod_{r=1}^{r=\nu} [\mathcal{A}_{rp,rq}(2 r a_{p,q})\, \mathcal{A}_{-rp,-rq}(2 r a_{p,q})] = \prod_{r=1}^{r=\nu} \frac{\sigma(3 r a_{p,q})}{\sigma^2(2 r a_{p,q})\, \sigma(r a_{p,q})}.$$

Au moyen des formules (VI_1) et en partant de la dernière expression de $R_{p,q}$,

§ II. — Équations modulaires.

687. Considérons d'abord les deux fonctions doublement périodiques $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$ et $p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$, où n est un nombre premier impair donné. La formule (XXI_4) permet d'exprimer la seconde de ces deux fonctions au moyen d'une fonction rationnelle de la première; les coefficients de cette fonction rationnelle de $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$ ou $p(u; g_2, g_3)$ dépendent des quantités $p\,a_{p,0}$. En développant les deux membres de cette égalité suivant les puissances de u et en égalant les coefficients de u^2 et de u^3, on obtient immédiatement les expressions des invariants G_2, G_3 de la fonction $p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$ au moyen de g_2, g_3 et des sommes $\sum_{r=1}^{n-1} p''\frac{2r\omega_1}{n}$, $\sum_{r=1}^{n-1} p^{(\mathrm{IV})}\frac{2r\omega_1}{n}$; si, dans ces expressions, on remplace les dérivées de p par leurs valeurs (XCVII) en fonction des puissances de p, on a

$$(1)\quad \begin{cases} G_2 = g_2 + 60\displaystyle\sum_{r=1}^{n-1} p^2\frac{2r\omega_1}{n} - 5(n-1)g_2, \\ G_3 = g_3 + 140\displaystyle\sum_{r=1}^{n-1} p^3\frac{2r\omega_1}{n} - 21\,g_2\sum_{r=1}^{n-1} p\,\frac{2r\omega_1}{n} - 14(n-1)g_3; \end{cases}$$

---

on trouve sans difficulté, en supposant $n = 6g \pm 1$,

$$R_{p,q} = (-1)^g\, T_{p,q}^{-2},$$

où l'on a posé

$$T_{p,q} = e^{-\frac{\nu(\nu+1)}{12}(2p\eta_1+2q\eta_3)a_{p,q}} \prod_{r=1}^{r=\nu} \sigma(r a_{p,q}) = \left[\frac{2\omega_1}{\mathfrak{S}_1'(0)}\right]^{\nu} e^{\frac{\nu(\nu+1)}{12\nu+6}q(p+q\tau)\pi i} \prod_{r=1}^{r=\nu} \mathfrak{S}_1\left(\frac{rp+rq\tau}{n}\right);$$

en particulier

$$T_{1,0} = \left[\frac{2\omega_1}{\mathfrak{S}_1'(0)}\right]^{\nu} \prod_{r=1}^{r=\nu} \mathfrak{S}_1\left(\frac{r}{n}\right) = \frac{\omega_1\sqrt{n}}{\pi}\,\frac{h(n\tau)}{[h(\tau)]^n} = \sqrt{n}\,\frac{h(n\tau)}{h(\tau)}\,(16\mathcal{G})^{-\frac{\nu}{12}}.$$

Ces diverses transformations résultent sans peine des formules (XXXI_4), (XXXIII_1), (XXXVI_2), ($\mathrm{XXXVIII}_{11}$), (LI_2), (LIII_2); on rappelle qu'*ici* p, q désignent des entiers qui ne sont pas tous deux divisibles par n. Pour plus de détails, *voir* KIEPERT. *Journal de Crelle*, t. 87, p. 199; t. 95, p. 218.

comme les fonctions symétriques des quantités $p\frac{2r\omega_1}{n}$ sont des fonctions rationnelles de l'une d'elles, $P_1 = \sum_{r=1}^{\nu} p\frac{2r\omega_1}{n}$, par exemple, on voit que G_2, G_3 sont des fonctions rationnelles de g_2, g_3, P_1 (à coefficients entiers); en d'autres termes, G_2, G_3 appartiennent au corps Ω_1' obtenu en adjoignant P_1 au corps Ω'; ou encore, il existe deux équations algébriques, à coefficients entiers entre G_2, G_3, g_2, g_3.

Si, entre ces deux équations et les deux équations (XXXVII_8), qui expriment que $J(n\tau)$, $J(\tau)$ sont respectivement des fonctions rationnelles à coefficients entiers de G_2, G_3 et de g_2, g_3, on élimine G_2, G_3 et g_2, par exemple, on obtient une équation algébrique à coefficients entiers, entre $J(n\tau)$ et $J(\tau)$; dans cette équation ne peut figurer g_3, car si l'on change ω_1, ω_3 en $\lambda\omega_1$, $\lambda\omega_3$ où λ désigne un nombre quelconque, τ ne change pas, tandis que g_3 se change en $\lambda^{-6}g_3$. Il existe donc aussi (XXXVII_8) une équation algébrique, à coefficients entiers entre $k^2(n\tau)$ et $k^2(\tau)$.

688. On peut encore reconnaître l'existence d'une équation entre $\sqrt{k} = \sqrt{k(\tau)}$ et $\sqrt{l} = \sqrt{k(n\tau)}$ en s'appuyant sur les résultats établis au n° 584, de manière à obtenir quelques renseignements de plus.

Supposons formée l'équation irréductible $F(z) = 0$, de degré $2\nu(\nu+1)$, qui a pour racines les valeurs non nulles de $\operatorname{sn}^2 a_{p,q}$; les coefficients de cette équation appartiennent au corps Ω formé par les nombres rationnels et les fonctions rationnelles à coefficients entiers de $\varphi(\tau) = \sqrt[4]{k}$. Supposons aussi formée l'équation $G(y) = 0$ de degré $2\nu + 2$ dont on a établi l'existence au n° 684 et qui a pour racines les diverses valeurs d'une fonction symétrique de celles des racines de l'équation $F(z) = 0$ qui correspondent aux éléments (p, q) d'une même ligne; si les coefficients de la fonction symétrique appartiennent au corps Ω, il en est de même des coefficients du polynome $G(y)$. Enfin, supposons formée l'équation $g(z; y) = 0$, du degré ν en z, qui, lorsqu'on y remplace y par une des racines de l'équation $G(y) = 0$, a pour racines les valeurs de $\operatorname{sn}^2 a_{p,q}$ correspondant à la même ligne d'éléments (p,q) que la racine de l'équation $G(y) = 0$; les coefficients de l'expres-

sion $g(z; y)$, envisagée comme un polynome en y et z, appartiennent aussi au corps Ω.

Ceci posé, reportons-nous à la formule (LXXXVI$_3$) qui peut s'écrire

$$\varphi^2(n\tau) = \sqrt{l} = (\sqrt{k})^n \prod_{r=1}^{r=\nu} \frac{\operatorname{cn}^2 a_{r,0}}{\operatorname{dn}^2 a_{r,0}};$$

si y_0 est la racine de l'équation $G(y) = 0$ qui correspond à la ligne $(1, 0), (2, 0), \ldots, (\nu, 0)$ du système complet d'éléments (p, q), le second membre, qui est évidemment une fonction symétrique de $\operatorname{sn}^2(a_{1,0}), \operatorname{sn}^2(a_{2,0}), \ldots, \operatorname{sn}^2(a_{\nu,0})$, c'est-à-dire une fonction symétrique des racines de l'équation en z, $g(z; y_0) = 0$, s'exprimera au moyen d'une fonction rationnelle $R(y_0)$ de y_0, dont les coefficients appartiennent au corps Ω; il en sera donc de même du premier membre $\varphi^2(n\tau)$ ou $\sqrt{l}$.

Si, maintenant, dans l'équation $G(y) = 0$, de degré $2\nu + 2$ en y, on fait la transformation $w = R(y)$, on obtiendra une équation en w, de degré $2\nu + 2 = n + 1$, dont les coefficients appartiennent au même corps Ω, et que vérifie $\sqrt{l}$; cette équation peut être formée, en suivant la méthode précédente, par des calculs purement algébriques; nous en donnerons des exemples pour $n = 3$ et $n = 5$. Cette équation est dite *équation modulaire*. On étend d'ailleurs ce nom à d'autres équations analogues.

Observons que le même raisonnement s'applique mot pour mot à la quantité

$$M = \frac{\sqrt{l}}{(\sqrt{k})^n} \prod_{r=1}^{r=\nu} \frac{1}{\operatorname{sn}^2 a_{r,0}} = \frac{\varphi^2(n\tau)}{\varphi^{2n}(\tau)} \prod_{r=1}^{r=\nu} \frac{1}{\operatorname{sn}^2 a_{r,0}}$$

de l'équation (LXXXVI$_5$); on formera ainsi l'*équation au multiplicateur*, entre M et $\varphi(\tau)$, équation qui sera encore du degré $2\nu + 2 = n + 1$ en M.

689. On peut se placer, pour définir l'équation modulaire [1], à un point de vue tout autre, d'où nous allons voir que la fonction

---

[1] *Cf.* M. KRAUSE, *Theorie der Doppeltperiodischen Functionen*..., t. I, p. 203 et suivantes. Le lecteur qui voudra pousser plus avant l'étude des Fonctions elliptiques à l'Algèbre pourra consulter le troisième Volume des *Fonctions elliptiques* de HALPHEN, et surtout les *Elliptische Functionen* de M. H. WEBER.

$\varphi(n\tau)$ elle-même est racine d'une équation algébrique, de degré $n+1$, dont les coefficients sont des polynomes en $\varphi(\tau)$.

Si τ_0 est une solution de l'équation $\varphi(\tau)=\varphi_0$, où φ_0 est donné, toutes les solutions de cette équation sont des transformées linéaires $\dfrac{\gamma+\delta\tau_0}{\alpha+\beta\tau_0}$ de τ_0 rentrant dans le type 1° du Tableau (XX_6), et pour lesquelles on a

$$\gamma\delta+\delta^2-1\equiv 0 \pmod{16},$$

comme il résulte du théorème du n° 525 concernant les solutions de l'équation

$$\varphi^4(\tau)=k(\tau)=\varphi_0^4$$

et de la formule ($XLVI_1$, cas 1°) qui se rapporte à la fonction φ. Toutes les valeurs de la fonction $\varphi(n\tau)$ sont donc de la forme $\varphi\left[\dfrac{n(\gamma+\delta\tau_0)}{\alpha+\beta\tau_0}\right]$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignent des entiers vérifiant les conditions précédentes; il est bien aisé de voir que ces valeurs sont au nombre de $n+1$.

1° Si β est divisible par n, on a

$$\varphi\left[\frac{n(\gamma+\delta\tau_0)}{\alpha+\beta\tau_0}\right]=\varphi\left(\frac{n\gamma+\delta\, n\tau_0}{\alpha+\dfrac{\beta}{n}\,n\tau_0}\right)=\varphi(n\tau_0);$$

en effet, les nombres $\alpha, \dfrac{\beta}{n}, n\gamma, \delta$ vérifient les conditions imposées; d'abord leur déterminant est égal à 1; puis la condition $\gamma\delta+\delta^2-1\equiv 0 \pmod{16}$, supposant δ impair, implique $\gamma\equiv 0 \pmod{8}$; en ajoutant membre à membre les deux congruences

$$(n-1)\gamma\delta\equiv 0, \qquad \gamma\delta+\delta^2-1\equiv 0 \pmod{16},$$

on trouve

$$n\gamma.\delta+\delta^2-1\equiv 0 \pmod{16}.$$

2° Si β n'est pas divisible par n, on peut déterminer cinq nombres entiers a, b, c, d, ξ tels que l'on ait

$$\frac{n(\gamma+\delta\tau_0)}{\alpha+\beta\tau_0}=\frac{c+d\,\dfrac{\tau_0-\xi}{n}}{a+b\,\dfrac{\tau_0-\xi}{n}}, \qquad ad-bc=1,$$

et cela quel que soit τ_0. Il faut pour cela que les nombres α, β, $n\gamma$, $n\delta$ soient proportionnels à $na-b\xi$, b, $nc-d\xi$, d, et comme

le déterminant des quatre premiers nombres est égal à n, ainsi que celui des quatre derniers, le facteur de proportionnalité ne peut être que ± 1; supposons qu'il soit $+1$, ce qui ne restreint pas la généralité de la solution, et cherchons à satisfaire aux équations

$$na - b\xi = \alpha, \qquad b = \beta, \qquad nc - d\xi = n\gamma, \qquad d = n\delta;$$

on en tire

$$b = \beta, \qquad d = n\delta, \qquad c = \gamma + \delta\xi, \qquad na = \alpha + \beta\xi;$$

il suffit évidemment de déterminer ξ de manière que $\alpha + \beta\xi$ soit divisible par n, ce qui est possible, puisque β est premier à n; rien n'empêche même d'imposer à ξ la condition d'être divisible par un entier quelconque premier à n, par exemple d'être divisible par 16; a, b, c, d, ξ étant ainsi déterminés, et a, d étant impairs, b, c pairs, comme il résulte des expressions mêmes de ces quatre nombres au moyen de α, β, γ, δ, ξ, on a (XLVI_1),

$$\varphi\left(n\,\frac{\gamma+\delta\tau_0}{\alpha+\beta\tau_0}\right) = i^{\frac{cd+d^2-1}{4}}\,\varphi\left(\frac{\tau_0-\xi}{n}\right);$$

d'ailleurs, $cd + d^2 - 1 = (\gamma + \delta\xi)n\delta + n^2\delta^2 - 1$, si l'on suppose ξ divisible par 16, est congru (mod. 16) à $n\gamma\delta + n^2\delta^2 - 1$, et, par conséquent, puisque $\gamma\delta + \delta^2 - 1$ est divisible par 16, à $(n-1)\gamma\delta + (n^2-1)\delta^2$, et, par suite, à $n^2 - 1$; on a donc

$$\varphi\left(n\,\frac{\gamma+\delta\tau_0}{\alpha+\beta\tau_0}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\,\varphi\left(\frac{\tau_0-\xi}{n}\right).$$

690. Les diverses valeurs de $\varphi(n\tau)$ seront donc les valeurs distinctes de

$$\varphi(n\tau_0), \qquad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\,\varphi\left(\frac{\tau_0-16\lambda}{n}\right),$$

que l'on obtiendra, par exemple, en donnant à λ les valeurs 0, 1, 2, ..., $n-1$. On reconnaît, d'ailleurs, très aisément que les valeurs ainsi obtenues sont effectivement distinctes, sauf pour des valeurs spéciales de τ_0.

Il est clair, par ce qui précède, que la substitution à τ_0 d'une valeur de τ telle qu'on ait $\varphi(\tau) = \varphi(\tau_0)$ n'en peut altérer l'ensemble. Les fonctions symétriques élémentaires de ces $(n+1)$ va-

leurs seront donc des fonctions algébriques de $\varphi_0 = \varphi(\tau_0)$ qui ne sont susceptibles que d'une seule valeur, quand on se donne φ_0, c'est-à-dire des fonctions rationnelles de φ_0 à coefficients numériques. Il existe donc une équation algébrique $R(\varpi, u) = 0$, entière, à coefficients numériques, entre $\varpi = \varphi(n\tau)$ et $u = \varphi(\tau)$, de degré $n+1$ en ϖ. On voit de suite qu'une telle équation, ne devant pas changer par une substitution linéaire qui n'altère pas $\varphi(\tau)$, est irréductible dans un corps formé de nombres et de fonctions rationnelles de $\varphi(\tau)$ à coefficients numériques quelconques; nous la supposons débarrassée de tout facteur ne contenant que u; elle admet les racines

$$\varpi = \varphi(n\tau), \qquad \varpi = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi\left(\frac{\tau - 16\lambda}{n}\right), \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

L'égalité

$$R\left[(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi\left(\frac{\tau}{n}\right), \varphi(\tau)\right] = 0$$

étant vérifiée identiquement, on voit, en y changeant τ en $n\tau$, que l'équation $R\left[(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} u, \varpi\right] = 0$ est vérifiée en même temps que l'équation $R(\varpi, u) = 0$, qui, ainsi, ne change pas quand on change ϖ en $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} u$ et u en ϖ; d'autre part, le changement de τ en $\tau + 2$ (XLV_9) montre que l'équation $R(\varpi, u) = 0$ ne doit pas changer quand on y remplace u par $i^{\frac{1}{2}} u$ et ϖ par $i^{\frac{n}{2}} \varpi$. On voit ainsi, en particulier, qu'en regardant u et ϖ comme du premier degré, l'équation $R(\varpi, u) = 0$ est aussi bien du degré $n+1$ en u qu'en ϖ, qu'aucun terme du polynome $R(\varpi, u)$ ne peut être de dimension impaire, qu'aucun de ces termes ne peut non plus contenir une seule des deux variables ϖ, u à une puissance qui ne soit pas un multiple de 4.

691. Ces remarques permettent de réduire notablement le nombre des coefficients numériques de ce polynome, qu'il reste à déterminer. Pour cela, on pourra remplacer, dans le polynome écrit avec des coefficients indéterminés, $\varpi = \varphi(n\tau)$ et $u = \varphi(\tau)$ par les développements entiers en $q^{\frac{1}{8}}$ que l'on déduit immédiatement des formules (XXXVIII_1); on égalera ensuite à zéro les coefficients des

diverses puissances de $q^{\frac{1}{8}}$. Sauf le facteur $\sqrt{2}$, qui disparaît à cause de la parité des termes de $R(\varpi, u)$, ces coefficients sont entiers; on aura donc, pour déterminer les coefficients de $R(\varpi, u)$, à résoudre des équations du premier degré à coefficients entiers; les solutions seront des nombres rationnels, ou même, si l'on veut, entiers. Les coefficients de l'équation $R(\varpi, u) = 0$, considérée comme une équation en ϖ, appartiennent donc au corps Ω.

692. On écrit habituellement cette équation l'*équation modulaire proprement dite,* en y remplaçant ϖ par $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} v$; elle a alors pour racines

$$(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi(n\tau), \qquad \varphi\left(\frac{\tau - 16\lambda}{n}\right), \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

A l'équation $R(\varpi, u) = 0$ qui relie les deux fonctions $\varpi = \varphi(n\tau)$ et $u = \varphi(\tau)$ correspond une équation toute semblable reliant les deux fonctions $\varpi = \psi(\tau)$ et $u = \psi(n\tau)$. Si, en effet, dans l'équation

$$R[\varphi(n\tau), \varphi(\tau)] = 0,$$

qui est vérifiée identiquement en τ, on remplace τ par $-\frac{1}{n\tau}$, elle devient

$$R[\psi(\tau), \psi(n\tau)] = 0.$$

Le même mode de raisonnement permet de prouver l'existence d'une équation algébrique à coefficients entiers, entre $J(n\tau)$ et $J(\tau)$ qui, quand on regarde $J(\tau)$ comme donnée, a pour racines

$$J(n\tau), \qquad J\left(\frac{\tau-\lambda}{n}\right), \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n-1);$$

elle est du degré $n+1$ par rapport à chacune des quantités $J(n\tau)$, $J(\tau)$; elle est irréductible dans le corps formé par les nombres rationnels.

Il convient d'insister, enfin, sur ce que les formules (LVIII) de Schröter permettent d'obtenir *directement* des équations modulaires pour chaque nombre premier impair donné n; nous en donnerons des exemples pour $n = 3$ et $n = 5$.

§ III. — Problème de la transformation.

693. Le problème de la transformation pour des fonctions doublement périodiques quelconques $\Phi(u), \Psi(u)$ d'une même variable u consiste à rechercher la dépendance dans laquelle doivent se trouver les couples de périodes primitives de $\Phi(u)$ et de $\Psi(u)$ pour que ces deux fonctions soient liées par une relation *algébrique*. Ce problème se ramène immédiatement à celui de la transformation pour la fonction pu, puisque $\Phi(u \mid \omega_1, \omega_3)$ et $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$, d'une part, $\Psi(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$ et $p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$, d'autre part, sont liées par une relation *algébrique*. Si $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$ et $p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$ sont liées par une relation algébrique

$$f[p(u \mid \omega_1, \omega_3), \quad p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)] = 0,$$

on voit aisément, en l'envisageant comme une identité en u, et en y remplaçant u par u augmenté d'un multiple entier quelconque n_1 de $2\omega_1$, que l'on a aussi

$$f[p(u \mid \omega_1, \omega_3), \quad p(u + 2n_1\omega_1 \mid \Omega_1, \Omega_3)] = 0.$$

Puisqu'une équation algébrique ne peut avoir qu'un nombre fini de racines, cette relation envisagée comme une équation en

$$p(u + 2n_1\omega_1 \mid \Omega_1, \Omega_3)$$

permet, puisqu'elle est vérifiée quel que soit l'entier n_1, d'affirmer que parmi les multiples (entiers) de $2\omega_1$ il y en a certainement qui sont congrus à 0, *modulis* $2\Omega_1$, $2\Omega_3$; on verrait de même que parmi les multiples (entiers) de $2\omega_3$ il y en a certainement qui sont congrus à 0, *modulis* $2\Omega_1$, $2\Omega_3$; en sorte que, pour que deux fonctions pu puissent être transformées l'une dans l'autre, il faut nécessairement qu'il existe cinq entiers μ, a, b, c, d (que l'on peut toujours supposer sans diviseur commun), tels que l'on ait

$$\mu\omega_1 = a\Omega_1 + b\Omega_3, \qquad \mu\omega_3 = c\Omega_1 + d\Omega_3.$$

Soit δ le plus grand commun diviseur des quatre entiers a, b, c, d; nous savons, par la théorie des substitutions (n° 133), que l'on peut déterminer des couples (ω'_1, ω'_3), (Ω'_1, Ω'_3) respectivement

équivalents à (ω_1, ω_3), (Ω_1, Ω_3), et tels que l'on ait

$$\mu\omega'_1 = \frac{ad-bc}{\delta^2}\delta\Omega'_1, \qquad \mu\omega'_3 = \delta\Omega'_3.$$

Si l'on désigne par ν le plus grand commun diviseur de μ et de $\frac{ad-bc}{\delta^2}$, et par m, n les quotients de ces deux entiers par ν, on peut d'ailleurs mettre ces relations sous la forme

$$m\omega'_1 = n\delta\Omega'_1, \qquad m\nu\omega'_3 = \delta\Omega'_3;$$

m, n aussi bien que m, δ et que ν, δ sont premiers relatifs.

De ces relations on déduit que l'on a

$$p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega'_1}{n\delta}, \frac{\omega'_3}{\delta}\right) = p\left(u \,\middle|\, \frac{\Omega'_1}{m}, \frac{\Omega'_3}{m\nu}\right),$$

d'où, à cause du théorème de l'homogénéité,

$$\delta^2 p\left(\delta u \,\middle|\, \frac{\omega'_1}{n}, \omega'_3\right) = m^2 p\left(mu \,\middle|\, \Omega'_1, \frac{\Omega'_3}{\nu}\right);$$

mais $p(\delta u)$ est une fonction rationnelle de $p(u)$ formée avec les mêmes périodes; le numérateur est du degré δ^2, le dénominateur d'un degré inférieur à δ^2; en appliquant les formules (XXI_4) et (CIII_4), on voit d'ailleurs que $p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega'_1}{n}, \omega'_3\right)$ est une fonction rationnelle de $p(u \mid \omega'_1, \omega'_3)$, c'est-à-dire de $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$, dont le numérateur est du degré n, le dénominateur du degré $n-1$; $p\left(\delta u \,\middle|\, \frac{\omega'_1}{n}, \omega'_3\right)$ est donc une fonction rationnelle de $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$ dont le numérateur est du degré $n\delta^2$, le dénominateur d'un degré inférieur à $n\delta^2$. De même $p\left(mu \,\middle|\, \Omega'_1, \frac{\Omega'_3}{\nu}\right)$ est une fonction rationnelle de $p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$ dont le numérateur est du degré $m^2\nu$, le dénominateur d'un degré inférieur à $m^2\nu$. Ainsi deux fonctions $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$, $p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$ ne peuvent être liées par une relation algébrique que si elles sont aussi liées par une relation de la forme

$$R[p(u \mid \omega_1, \omega_3)] = R_1[p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)],$$

où R et R_1 sont des fonctions rationnelles dont les numérateurs sont de degrés respectivement égaux à $n\delta^2$, $m^2\nu$ et dont les déno-

minateurs sont de degrés inférieurs à $n\delta^2$, $m^2\nu$; m, n, δ, ν sont des entiers qui doivent vérifier la condition que m, n d'une part, m, δ d'autre part, et enfin ν, δ soient premiers relatifs. Il n'est pas difficile de montrer que ces entiers sont les mêmes de quelque façon que l'on choisisse les périodes $2\omega'_1$, $2\omega'_3$ ou $2\Omega'_1$, $2\Omega'_3$ équivalentes à $2\omega_1$, $2\omega_3$ ou $2\Omega_1$, $2\Omega_3$.

On réserve le nom de *transformation primitive* à celles qui correspondent au cas où $m = \delta = s = 1$; n est le degré de la transformation primitive. Ce qui précède met en évidence que toute transformation peut s'obtenir au moyen de transformations primitives. On voit aussi comment les équations modulaires correspondant à une transformation quelconque dépendent des équations modulaires correspondant à une transformation primitive, dont nous avons parlé au § II.

§ IV. — Division des périodes par 3. — Équations modulaires correspondantes.

694. Nous avons formé ($\mathrm{CIV}_{2,3}$), et explicitement au bas du Tableau de formules (CIV), l'équation $\Psi_3(u) = 0$ qui, par la substitution $y = pu$, prend la forme

$$f(y) = 3y^4 - \frac{3}{2}g_2 y^2 - 3g_3 y - \frac{g_2^2}{16} = 0,$$

et dont les quatre racines sont $p\frac{2\omega_1}{3}$, $p\frac{2\omega_3}{3}$, $p\frac{2\omega_3 \pm 2\omega_1}{3}$. Si, entre cette équation et l'équation (XCVI),

$$y = \frac{1}{z} - \frac{1+k^2}{3},$$

qui suppose $\sqrt{e_1 - e_3} = 1$, on élimine y, on obtient immédiatement l'équation $F(z) = 0$, dont les quatre racines sont $\mathrm{sn}^2\frac{2K}{3}$, $\mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{3}$, $\mathrm{sn}^2\frac{2K \pm 2iK'}{3}$. En tenant compte des relations (XCVI) (n° 419),

$$g_2 = \tfrac{4}{3}(k^4 - k^2 + 1), \qquad g_3 = \tfrac{4}{27}(k^2+1)(2k^2-1)(k^2-2),$$

on parvient aisément à l'équation

$$F(z) = k^4 z^4 - 6k^2 z^2 + 4(1 + k^2) z - 3 = 0.$$

Par la substitution $\mathrm{z} = kz$, cette équation se transforme en

$$(1) \qquad (\mathrm{z}^2 - 1)^2 = 4(1 - \rho \mathrm{z} + \mathrm{z}^2),$$

où

$$\rho = k + \frac{1}{k};$$

les racines de cette équation sont les carrés des valeurs que prend la fonction $\mathrm{El}\left(v, \frac{\tau}{2}\right)$ de Kronecker (LXXV_3) lorsqu'on y remplace v par $\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1 \mp \tau}{2}$.

On peut déduire directement l'équation (1) de l'égalité

$$\operatorname{sn} 2a_{p,q} = (-1)^{p+1} \operatorname{sn} a_{p,q},$$

qui a manifestement lieu pour $n = 3$; en posant $\mathrm{z} = k \operatorname{sn}^2 a_{p,q}$ et tenant compte de la formule de duplication (LXXXV_4), on a, en effet,

$$\frac{1}{k}\mathrm{z} = \operatorname{sn}^2 2a_{p,q} = \frac{4\frac{\mathrm{z}}{k}\left(1 - \frac{\mathrm{z}}{k}\right)(1 - k\mathrm{z})}{(1 - \mathrm{z}^2)^2};$$

en supprimant le facteur $\frac{1}{k}\mathrm{z}$ on retombe sur l'équation (1).

695. Si l'on désigne par z_{10} la racine de l'équation (1) qui correspond à l'élément (1, 0), on a d'ailleurs (LXXXVI_3)

$$\varphi^2(3\tau) = \sqrt{l} = (\sqrt{k})^3 \frac{\operatorname{cn}^2 \frac{2K}{3}}{\operatorname{dn}^2 \frac{2K}{3}} = \varphi^2(\tau) \frac{k - \mathrm{z}_{10}}{1 - k\mathrm{z}_{10}};$$

il suffit d'éliminer z_{10} entre cette équation et l'équation (1), dans laquelle on a remplacé z par z_{10}, pour obtenir une équation entre $\varphi^2(3\tau)$ et $\varphi^2(\tau)$; l'équation

$$[\varphi^4(\tau) - \varphi^4(3\tau)]^2 = 4\varphi^2(\tau)\varphi^2(3\tau)[1 - \varphi^2(\tau)\varphi^2(3\tau)]^2,$$

à laquelle on parvient ainsi, entraîne immédiatement la relation

$$\varphi^4(\tau) - \varphi^4(3\tau) = 2\varphi(\tau)\varphi(3\tau)[1 - \varphi^2(\tau)\varphi^2(3\tau)],$$

puisque les premiers termes des développements des deux membres ($XXXVIII_1$) suivant les puissances de $q^{\frac{1}{8}}$ sont égaux (ils sont tous deux égaux à $+4q^{\frac{1}{2}}$). En posant

$$u = \varphi(\tau), \qquad v = -\varphi(3\tau),$$

on obtient l'équation modulaire proprement dite (pour $n = 3$)

$$(2) \qquad v^4 - u^4 - 2uv(1 - u^2v^2) = 0.$$

696. On va vérifier que cette équation (2) se déduit aussi de l'équation (1) par une transformation rationnelle. On a, en effet,

$$\frac{\sqrt{l}}{(\sqrt{k})^3} = \frac{(k - z)(1 - kz)}{k(1 - kz)^2} = \frac{1 - \rho z + z^2}{(1 - kz)^2} = \frac{(1 - z^2)^2}{4(1 - kz)^2},$$

la dernière égalité résultant de l'équation (1); on en conclut, en extrayant les racines carrées,

$$\frac{\varphi(3\tau)}{\varphi^3(\tau)} = \frac{1 - z^2}{2(1 - kz)},$$

car il est bien aisé de voir que le second membre de cette égalité doit, comme le premier, être positif pour de grandes valeurs positives de $\frac{\tau}{i}$. On n'a plus qu'à faire la transformation

$$y = \frac{1 - z^2}{2(1 - kz)};$$

en remplaçant dans (1), $1 - z^2$ par $2(1 - kz)y$, en remarquant que le second membre peut s'écrire $(1 - kz)\left(1 - \frac{1}{k}z\right)$, en supprimant le facteur $1 - kz$ qui, en vertu de (1), ne peut s'annuler que si $k^2 = 1$, on trouve

$$y^2 = \frac{1 - \frac{1}{k}z}{1 - kz};$$

l'élimination de z, entre cette expression de y^2 et celle qui est fournie par la transformation rationnelle elle-même, donne enfin

$$k^2y^4 - 2k^2y^3 + 2y - 1 = 0,$$

et, en posant $k = u^4$, $y = \frac{-v}{u^3}$, on retrouve l'équation modulaire (2) entre $u = \varphi(\tau)$ et $v = -\varphi(3\tau)$.

697. On a d'ailleurs aussi

$$
\begin{aligned}
\psi^8(\tau)\,\psi^8(3\tau) &= [1-\varphi^8(\tau)]\,[1-\varphi^8(3\tau)] \\
&= (1-u^8)(1-v^8) = [(1-u^4)(1+v^4)]\,[(1-v^4)(1+u^4)] \\
&= (1+v^4-u^4-u^4v^4)(1+u^4-v^4-u^4v^4) \\
&= (1-u^4v^4+2uv-2u^3v^3)(1-u^4v^4-2uv+2u^3v^3) \\
&= (1-u^4v^4)^2-4(1-u^2v^2)\,u^2v^2 = (1-u^2v^2)^4 \\
&= [1-\varphi^2(\tau)\,\varphi^2(3\tau)]^4;
\end{aligned}
$$

on en déduit immédiatement, en extrayant la racine quatrième, la relation

$$\varphi^2(\tau)\,\varphi^2(3\tau)+\psi^2(\tau)\,\psi^2(3\tau)=1,$$

ou encore

$$\sqrt{kl}+\sqrt{k'l'}=1;$$

c'est sous cette forme que Legendre (*Fonctions elliptiques*, t. I, p. 230) a donné le premier l'équation modulaire pour $n=3$.

698. Plaçons-nous maintenant au point de vue du n° 691, et proposons-nous d'établir directement l'équation modulaire entre $u=\varphi(\tau)$ et $\varpi=\varphi(3\tau)$. On sait qu'elle est du quatrième degré en ϖ, du quatrième degré en u, qu'aucun de ses termes ne peut être de dimension impaire en ϖ et u, qu'aucun de ses termes ne peut contenir ϖ ou u seul, à une puissance qui ne soit un multiple de 4; elle est donc nécessairement de la forme

$$
\begin{aligned}
&(a_0u^4+a_2u^2+a_4)\,\varpi^4+(b_1u^3+b_3u)\,\varpi^3 \\
&\quad+(c_0u^4+c_2u^2)\,\varpi^2+(d_1u^3+d_3u)\,\varpi+e_0u^4=0.
\end{aligned}
$$

Si l'on identifie cette équation avec les deux équations que l'on obtient en y remplaçant, d'une part, ϖ par $-u$, u par ϖ, d'autre part, u par $i^{\frac{1}{2}}u$, ϖ par $i^{\frac{3}{2}}\varpi$, on voit que :

ou bien

$$a_0=a_2=b_3=c_0=c_2=d_1=0 \qquad \text{et} \qquad e_0+a_4=0;$$

ou bien

$$a_2=b_3=c_0=d_1=a_4=b_1=d_3=e_0=0;$$

la première alternative est seule possible, car dans la seconde l'équation modulaire ne serait pas irréductible; l'équation modulaire

est donc nécessairement de la forme

$$a_4(w^4 - u^4) + b_1 u^3 w^3 + d_3 uw = 0.$$

Si, dans le premier membre de cette équation, on remplace $u = \varphi(\tau)$, $w = \varphi(3\tau)$ par leurs développements (XXXVIII$_1$), on obtient, en égalant à zéro les coefficients de $q^{\frac{1}{2}}$ et de $q^{\frac{3}{2}}$, les relations

$$2a_4 - d_3 = 0, \qquad b_1 + d_3 = 0,$$

en sorte que l'équation cherchée est

$$w^4 - u^4 - 2u^3 w^3 + 2uw = 0.$$

Pour $w = -v$, on retombe sur l'équation (2).

699. Cette même équation (2) se déduit aussi de la formule (LVIII$_1$) et c'est peut-être par cette voie que l'on aperçoit le mieux la source commune d'où découlent toutes les équations modulaires [1].

Si nous faisons, dans cette formule, $\alpha = 1$, $\beta = 3$ et, d'une part, $x = \frac{1}{4}$, $y = -\frac{1}{4}$, d'autre part, $x = \frac{3}{4}$, $y = -\frac{3}{4}$, puis que nous ajoutions les deux relations ainsi obtenues, il viendra

$$\begin{aligned}&\mathfrak{S}_3(\tfrac{1}{4}\,|\,\tau)\mathfrak{S}_3(\tfrac{1}{4}\,|\,3\tau) + \mathfrak{S}_3(\tfrac{3}{4}\,|\,\tau)\mathfrak{S}_3(\tfrac{3}{4}\,|\,3\tau)\\ &\quad = 2\mathfrak{S}_3(0\,|\,4\tau)\,\mathfrak{S}_3(0\,|\,12\tau) - 2q^4\,\mathfrak{S}_3(2\tau\,|\,4\tau)\,\mathfrak{S}_3(6\tau\,|\,12\tau).\end{aligned}$$

Si l'on transforme le premier membre de cette égalité, en appliquant la formule (XL$_1$), il se présente sous la forme

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{S}_3(\tfrac{1}{2}|4\tau) + \mathfrak{S}_2(\tfrac{1}{2}|4\tau)][\mathfrak{S}_3(\tfrac{1}{2}|12\tau) + \mathfrak{S}_2(\tfrac{1}{2}|12\tau)]\\ &+ [\mathfrak{S}_3(\tfrac{3}{2}|4\tau) + \mathfrak{S}_2(\tfrac{3}{2}|4\tau)][\mathfrak{S}_3(\tfrac{3}{2}|12\tau) + \mathfrak{S}_2(\tfrac{3}{2}|12\tau)];\end{aligned}$$

quel que soit T, on a d'ailleurs (XXXIV)

$$\mathfrak{S}_2(\tfrac{3}{2}|\mathrm{T}) = -\mathfrak{S}_2(\tfrac{1}{2}|\mathrm{T}) = \mathfrak{S}_1(0|\mathrm{T}) = 0; \qquad \mathfrak{S}_3(\tfrac{1}{2}\mathrm{T}|\mathrm{T}) = e^{-\frac{i\pi}{4}\mathrm{T}}\,\mathfrak{S}_2(0\,|\,\mathrm{T});$$
$$\mathfrak{S}_3(\tfrac{3}{2}|\mathrm{T}) = \mathfrak{S}_3(\tfrac{1}{2}|\mathrm{T}) = \mathfrak{S}_4(0|\mathrm{T});$$

l'égalité précédente peut donc s'écrire

$$\mathfrak{S}_4(0|4\tau)\mathfrak{S}_4(0|12\tau) = \mathfrak{S}_3(0|4\tau)\mathfrak{S}_3(0|12\tau) - \mathfrak{S}_2(0|4\tau)\mathfrak{S}_2(0|12\tau).$$

---

[1] Voir *Journal de Liouville*, 2e sér., t. III, p. 260; 1858.

Cette équation, dans laquelle on peut supposer τ remplacé par $\frac{\tau}{4}$, est manifestement identique à l'équation modulaire (2).

700. Observons en passant que l'on obtient, par le même procédé, des équations analogues en posant dans la formule (LVIII_1), écrite pour $\alpha = 1$, $\beta = 3$, au lieu de

$$x = \tfrac{1}{4}, \quad y = -\tfrac{1}{4}, \quad \text{et} \quad x = \tfrac{3}{4}, \quad y = -\tfrac{3}{4},$$

soit

$$x = 2\tau + \tfrac{1}{4}, \quad y = 2\tau - \tfrac{1}{4}, \quad \text{et} \quad x = 2\tau + \tfrac{3}{4}, \quad y = 2\tau - \tfrac{3}{4},$$

soit

$$x = 4\tau + \tfrac{1}{4}, \quad y = 4\tau - \tfrac{1}{4}, \quad \text{et} \quad x = 4\tau + \tfrac{3}{4}, \quad y = 4\tau - \tfrac{3}{4};$$

on parvient ainsi aux relations

$$-\mathfrak{S}_4(0\,|\,\tau)\mathfrak{S}_4(\tau\,|\,3\tau) = \mathfrak{S}_3(0\,|\,\tau)\mathfrak{S}_3(\tau\,|\,3\tau) - \mathfrak{S}_2(0\,|\,\tau)\mathfrak{S}_2(\tau\,|\,3\tau),$$
$$\mathfrak{S}_4(0\,|\,\tau)\mathfrak{S}_4(2\tau\,|\,3\tau) = \mathfrak{S}_3(0\,|\,\tau)\mathfrak{S}_3(2\tau\,|\,3\tau) - \mathfrak{S}_2(0\,|\,\tau)\mathfrak{S}_2(2\tau\,|\,3\tau).$$

701. L'équation au multiplicateur s'obtient en éliminant z entre les deux équations

$$Mz(1 - kz) = k - z, \qquad z^4 - 6z^2 + 4\rho z - 3 = 0.$$

Ces équations sont équivalentes aux deux équations

$$Az^2 + Bz + C = 0, \qquad A'z^2 + B'z + C' = 0,$$

où

$$A = M + 1, \quad B = 3kM^2 - 6kM - k, \quad C = -3M^2 + 4k^2M + M,$$
$$A' = -kM, \quad B' = M + 1, \quad C' = -k;$$

l'équation au multiplicateur est donc

$$(AC' - A'C)^2 = (AB' - A'B)(BC' - B'C);$$

en divisant les deux membres par $(k^2 - 1)^2$, et réduisant, elle prend la forme

$$3M^4 + 8(1 - 2k^2)M^3 + 6M^2 - 1 = 0.$$

L'équation $f(y) = 0$ dans laquelle se transforme l'équation $\Psi_3(u) = 0$ par la substitution $y = pu$ (nº 694) étant du quatrième degré en y, est résoluble par radicaux; il en est de même

de l'équation $F(z)=0$. En général, ces équations ne sont pas abéliennes.

702. Dans le cas où g_2 et g_3 sont réels, il n'est pas difficile d'écrire explicitement les valeurs des quatre racines de l'équation $f(y)=0$ dans laquelle se transforme l'équation $\Psi_3(u)=0$ par la substitution $y=pu$.

Convenons de désigner par ε la racine cubique imaginaire de l'unité dont l'argument est $\frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$, suivant que le discriminant

$$\mathcal{G}=\tfrac{1}{16}(g_2^3-27\,g_3^2)$$

est négatif ou positif; par Γ la racine cubique réelle de $-2\mathcal{G}$; par a, b, c les quantités

$$a=\tfrac{1}{12}g_2+\tfrac{1}{6}\Gamma,\qquad b=\tfrac{1}{12}g_2+\frac{\varepsilon}{6}\Gamma,\qquad c=\tfrac{1}{12}g_2+\frac{\varepsilon^2}{6}\Gamma;$$

par $\sqrt{a}$ la racine positive de a; par $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ les racines de b et de c dont la partie réelle est positive; il est aisé de voir que $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ sont imaginaires conjuguées et que le coefficient de i dans la partie purement imaginaire de $\sqrt{b}$ est positif. On a alors

$$p\,\frac{2\omega_1}{3}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c},\qquad p\,\frac{2\omega_3+2\omega_1}{3}=-\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c},$$

$$p\,\frac{2\omega_3}{3}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c},\qquad p\,\frac{2\omega_3-2\omega_1}{3}=-\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}.$$

L'ordre dans lequel on a égalé les quatre racines de l'équation $f(y)=0$ aux nombres $p\frac{2\omega_1}{3}$, $p\frac{2\omega_3}{3}$, $p\frac{2\omega_3\pm2\omega_1}{3}$ est déterminé par la condition que $p\frac{2\omega_1}{3}$ soit réel et positif, $p\frac{2\omega_3}{3}$ réel et négatif; $p\frac{2\omega_3\pm2\omega_1}{3}$ s'exprime au moyen de $p\frac{2\omega_1}{3}$, $p\frac{2\omega_3}{3}$ et du produit $p'\frac{2\omega_1}{3}\cdot p'\frac{2\omega_3}{3}$, par les formules d'addition.

§ V. — Division des périodes par 5. — Équation modulaire correspondante.

703. Au lieu de former directement l'équation $\Psi_5 = 0$ et l'équation $f(y) = 0$, du douzième degré en y, qui en résulte par la substitution $y = p\,u$, équation qui a pour racines les douze valeurs que peut prendre l'expression $p\,a_{p,q}$ pour $a_{p,q} = \frac{2p\,\omega_1 + 2q\,\omega_3}{5}$, nous formerons les équations du sixième et du second degré dont sa solution dépend.

Soient

$$P = p(a_{p,q}) + p(2a_{p,q}), \qquad Q = p(a_{p,q})\,p(2a_{p,q}).$$

En posant $y = p(a_{p,q})$, on peut écrire (CIII$_7$)

$$P = y + \frac{(y^2 + \frac{1}{4}g_2)^2 + 2g_3 y}{4y^3 - g_2 y - g_3}, \tag{1}$$

et cette équation, si l'on regarde P comme égal à

$$p(a_{p,q}) + p(2a_{p,q}),$$

est aussi bien vérifiée par $p(a_{p,q})$ que par $p(2a_{p,q})$, puisque l'on a

$$p(4a_{p,q}) = p(a_{p,q});$$

le polynome

$$(y^2 + \tfrac{1}{4}g_2)^2 + 2g_3 y - (y - P)(4y^3 - g_2 y - g_3)$$

doit donc être divisible par $y^2 - Py + Q$; en écrivant qu'il en est ainsi, on obtient les deux équations

$$6PQ = P^3 + \tfrac{1}{2}g_2 P + g_3, \qquad 5Q^2 - Q(P - \tfrac{1}{2}g_2) + g_3 P + \tfrac{1}{16}g_2^2 = 0, \tag{2}$$

d'où l'on déduit

$$P^6 - 5g_2 P^4 - 40 g_3 P^3 - 5g_2^2 P^2 - 8g_2 g_3 P - 5g_3^2 = 0. \tag{3}$$

Cette équation est irréductible dans le corps Ω formé par les fonctions rationnelles de g_2, g_3 à coefficients entiers, puisque en la résolvant, par exemple, comme une équation du second degré

en g_3, la quantité sous le radical n'est pas un carré parfait. Il suit de là que les six valeurs de $p(a_{p,q}) + p(2a_{p,q})$ sont distinctes ([1]). P étant déterminé par cette équation, on déterminera y par l'équation

$$(4)\qquad y^2 - Py + \frac{1}{6P}(P^3 + \tfrac{1}{2}g_2 P + g_3) = 0.$$

On voit que toutes les fonctions symétriques entières de $p(a_{p,q})$, $p(2a_{p,q})$, dont les coefficients appartiennent à Ω, seront des fonctions rationnelles de P dans le même corps.

En éliminant P entre les équations (3) et (4), on obtiendrait l'équation du douzième degré $f(y) = 0$, ayant pour racines les douze valeurs que peut prendre $pa_{p,q}$ pour $n = 5$, équation que nous avons évité d'écrire.

704. Il n'y a aucune difficulté à former de même l'équation du sixième degré qui admet pour racine la quantité R introduite par M. Kiepert. On a, en effet, pour $n = 5$,

$$\begin{aligned} R &= [p(a_{p,q}) - p(2a_{p,q})][p(2a_{p,q}) - p(4a_{p,q})] = -[p(a_{p,q}) - p(2a_{p,q})]^2 \\ &= -[p(a_{p,q}) + p(2a_{p,q})]^2 + 4p(a_{p,q})\,p(2a_{p,q}) \\ &= 4Q - P^2 = -\tfrac{4}{3}P^2 + \tfrac{1}{3}g_2 + \tfrac{2}{3}\frac{g_2}{P}; \end{aligned}$$

([1]) Faisons en passant sur la forme de l'équation en P quelques observations qui s'étendent aisément aux équations analogues pour n premier impair.

Le coefficient de la plus haute puissance de P est numérique et les autres coefficients sont entiers en g_2, g_3; cela pouvait être prévu, car ce caractère, comme on l'a vu au n° 457, appartient au polynome en y que l'on déduit de $\Psi_n(u)$ quand on y remplace pu par y; il appartiendra donc aussi, en vertu de la théorie des fonctions symétriques, à l'équation $S(z) = 0$, ayant pour racines les sommes de $\frac{n-1}{2}$ racines de l'équation en y et à tous les diviseurs entiers en z, g_2, g_3 qui ne sont pas divisibles par un polynome en g_2, g_3; or le premier membre de l'équation en P est un tel diviseur, puisque ses racines sont certaines sommes de $\frac{n-1}{2}$ racines de l'équation en y.

D'autre part, le polynome en P est une fonction homogène de P, g_2, g_3 quand on regarde ces quantités comme du premier, du second, du troisième degré; cela pouvait aussi être prévu par l'équation d'homogénéité (VIII_3).

Ces remarques montrent que, pour former l'équation en P, on n'a à déterminer que des coefficients numériques; en particulier, il est certain que le terme en P^n manque toujours dans l'équation en P.

il suffit donc d'éliminer P entre les deux équations

$$P^3 + (3R - g_2)P - 2g_3 = 0,$$
$$P^6 - 5g_2 P^4 - 40 g_3 P^3 - 5g_2^2 P^2 - 8 g_2 g_3 P - 5g_3^2 = 0,$$

ou encore entre les deux équations qui leur sont équivalentes

$$P^3 + (3R - g_2)P - 2g_3 = 0,$$
$$9(R^2 + g_2 R - g_2^2)P^2 + 54 g_3(2R - g_2)P - 81 g_3^2 = 0;$$

on trouve ainsi, sans aucune peine, l'équation

$$\begin{aligned}\Psi(R) &= 5R^6 + 12 g_2 R^5 - 160 \mathcal{G} R^3 + 256 \mathcal{G}^2 \\ &= (5R^2 + 2g_2 R + g_2^2)(R^2 + g_2 R + g_2^2)^2 \\ &\qquad + 27 g_3^2(10 R^3 - 2g_2^3 + 27 g_3^2) = 0,\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{G} = \tfrac{1}{16}(g_2^3 - 27 g_3^2),$$

et l'on obtient, en passant, l'expression que voici de P en fonction rationnelle de R,

$$P = \frac{6 g_3 R^2}{-R^3 - 2 g_2 R^2 + 16 \mathcal{G}}.$$

705. Pour $n = 3$, les équations modulaires entre g_2, g_3, G_2, G_3 se déduisaient immédiatement des équations (1) du n° 687, puisque pour $n = 3$, ν est égal à 1, et que, par suite, on a simplement

$$\sum_{r=1}^{\nu} p\,\frac{2r\omega_1}{n} = P_1, \qquad \sum_{r=1}^{\nu} p^2\,\frac{2r\omega_1}{n} = P_1^2, \qquad \sum_{r=1}^{\nu} p^3\,\frac{2r\omega_1}{n} = P_1^3.$$

Pour $n = 5$, il faut faire subir à ces équations une légère transformation. Puisque $p\,\frac{2\omega_1}{5}$, $p\,\frac{4\omega_1}{5}$ sont racines de l'équation (4), on a d'abord

$$p\,\frac{2\omega_1}{5} + p\,\frac{4\omega_1}{5} = P_1, \qquad p\,\frac{2\omega_1}{5}\,p\,\frac{4\omega_1}{5} = \frac{P_1^3 + \frac{1}{2}g_2 P_1 + g_3}{6P_1};$$

on en déduit

$$p^2\,\frac{2\omega_1}{5} + p^2\,\frac{4\omega_1}{5} = P_1^2 - \frac{P_1^3 + \frac{1}{2}g_2 P_1 + g_3}{3P_1},$$

$$p^3\,\frac{2\omega_1}{5} + p^3\,\frac{4\omega_1}{5} = P_1^3 - \frac{P_1^3 + \frac{1}{2}g_2 P_1 + g_3}{2};$$

en remplaçant ces sommes par leurs valeurs dans les équations (1) du n° 687, on a ensuite

$$(5)\qquad \begin{cases} 39P_1g_2 + 40g_3 + P_1G_2 - 80P_1^3 = 0, \\ 112P_1g_2 + 195g_3 + G_3 - 140P_1^3 = 0; \end{cases}$$

les deux équations cherchées sont le résultat de l'élimination de P_1 entre les deux équations (3) et (5).

On observera que les deux équations (5) sont linéaires aussi bien en G_2, G_3 qu'en g_2, g_3. Si on les résout par rapport à g_2, g_3 et que, en y remplaçant P_1 par P, l'on porte ces valeurs dans l'équation (3), on obtiendra une équation du sixième degré en P dont les coefficients seront des polynomes en G_2, G_3 à coefficients entiers, et que devra vérifier P_1. Cette équation, jointe à l'équation (3) et aux équations (5), montre bien nettement comment les éléments de l'un des couples (g_2, g_3), (G_2, G_3) dépendent algébriquement de l'autre, les éléments de l'un des couples étant susceptibles de six valeurs quand on se donne l'autre couple. Il convient de remarquer que si l'on connaît deux couples correspondants (g_2, g_3), (G_2, G_3), la valeur correspondante de P_1, racine commune aux deux équations (4), s'obtient rationnellement au moyen de g_2, g_3, G_2, G_3.

706. Passons à l'équation du douzième degré qui donne les valeurs de $\operatorname{sn}^2 a_{p,q}$, où

$$a_{p,q} = \frac{2pK + 2iqK'}{5}.$$

Le système complet des éléments est, par exemple,

$$\begin{matrix} (0,\ 1), & (1,\ 0), & (1,\ 1), & (1,\ 2), & (1,\ 3), & (1,\ 4), \\ (0,\ 2), & (2,\ 0), & (2,\ 2), & (2,\ 4), & (2,\ 6), & (2,\ 8), \end{matrix}$$

où l'on a mis l'un sous l'autre les éléments qui appartiennent à une même ligne.

Si l'on pose

$$\rho = k + \frac{1}{k},$$

$$x = \sqrt{k}\,\operatorname{sn} a_{p,q},$$

$$y = k^2 \operatorname{sn}^2 a_{p,q} \operatorname{sn}^2 2a_{p,q},$$

on aura, en vertu des formules d'addition,

$$\sqrt{k}\,\mathrm{sn}(2a_{p,q}) = \pm 2x\,\frac{\sqrt{1-\rho x^2+x^4}}{1-x^4},$$

$$\sqrt{k}\,\mathrm{sn}(3a_{p,q}) = -\frac{3x-4\rho x^3+6x^5-x^9}{3x^8-4\rho x^6+6x^4-1},$$

$$y = \frac{4x^4(1-\rho x^2+x^4)}{(1-x^4)^2};$$

d'un autre côté, on voit de suite que l'on a

$$k\,\mathrm{sn}^2(3a_{p,q}) = k\,\mathrm{sn}^2(2a_{p,q}),$$

et l'on a là le moyen de former une équation que devront vérifier toutes les valeurs de $k\,\mathrm{sn}^2 a_{p,q}$; comme l'équation ainsi obtenue est du douzième degré, on est sûr que c'est l'équation cherchée; elle se trouvera mise sous une forme qui nous sera commode.

Si l'on pose, pour abréger,

$$z = x^2$$

et

$$A = 3-4\rho z+6z^2-z^4, \qquad B = 3z^4-4\rho z^3+6z^2-1,$$

cette équation sera

$$(1) \qquad f(z) = A^2(1-z^2)^2-4(1-\rho z+z^2)B^2.$$

La fonction $k^2\,\mathrm{sn}^2(a_{p,q})\,\mathrm{sn}^2(2a_{p,q})$, rationnelle en $k\,\mathrm{sn}^2(a_{p,q})$, ne change pas de valeur quand on y remplace $k\,\mathrm{sn}^2(a_{p,q})$ par l'une ou l'autre des racines qui correspondent aux éléments d'une même ligne verticale. Si donc, dans l'équation $f(z)=0$, on fait la transformation

$$(2) \qquad y = \frac{4z^2(1-\rho z+z^2)}{(1-z^2)^2},$$

on devra obtenir une équation du sixième degré en y, et les deux racines z qui correspondent à une même racine y de cette équation doivent pouvoir s'obtenir par une équation du second degré; c'est ce que l'on va vérifier.

707. Regardons dans ce qui suit y comme mis simplement pour abréger à la place de la fraction rationnelle en z qui con-

stitue le second membre de l'équation (2); résolvons cette équation par rapport à ρ et substituons la valeur ainsi trouvée dans A et dans B; on trouvera sans peine

$$A = (1 - z^2)\frac{y - z^2}{z^2}, \qquad B = (1 - z^2)^2(y - 1);$$

puis, en remplaçant aussi dans (1),

$$\frac{z^4 f(z)}{(1 - z^2)^6} = z^4 - (y^3 - 2y^2 + 3y)z^2 + y^2 = (y + z^2)^2 - z^2 y(y^2 - 2y + 5).$$

D'autre part, on a identiquement en y, z, ρ,

$$(3)\quad \begin{cases} z^4 - (y^3 - 2y^2 + 3y)z^2 + y^2 - y[(y-4)z^4 + 4\rho z^3 - (2y+4)z^2 + y] \\ = z^3\left[(1 + 4y - y^2)\dfrac{z^2 + y}{z} - 4\rho y\right]; \end{cases}$$

dans le premier membre, la quantité entre crochets est nulle en vertu de la définition (2) de y; on a donc les deux égalités

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{z^2 f(z)}{(1 - z^2)^6} = \left(\dfrac{y + z^2}{z}\right)^2 - y(y^2 - 2y + 5), \\ \dfrac{z f(z)}{(1 - z^2)^6} = \dfrac{y + z^2}{z}(1 + 4y - y^2) - 4\rho y, \end{cases}$$

qui peuvent être regardées comme des identités en z si l'on se reporte à la définition (2) de y; dans les deux seconds membres, z n'entre explicitement que par la combinaison $\frac{y + z^2}{z}$, z ne peut donc être une racine de $f(z)$ sans que la valeur de $\frac{y + z^2}{z}$ qui annule le second membre de la seconde égalité n'annule aussi le second membre de la première, c'est-à-dire sans que l'on ait

$$(5)\qquad \Theta(y) = 16\rho^2 y - (1 + 4y - y^2)^2(5 - 2y + y^2) = 0.$$

Réciproquement, si l'on prend pour y une racine de cette équation, pour z une racine de l'équation du second degré en z,

$$(6)\qquad \frac{y + z^2}{z}(1 + 4y - y^2) - 4\rho y = 0,$$

le second membre de la première égalité (4) sera nul [comme on le voit en éliminant ρ entre (5) et (6)], en sorte que

$$z^4 - (y^3 - 2y^2 + 3y) + y^2$$

sera nul; mais alors, en vertu de l'identité (3) dont le second membre est nul à cause de (6), on aura, puisque y n'est pas nul,

$$(y-4)z^4+4\rho z^3-(2y+4)z^2+y=0,$$

c'est-à-dire que y satisfera bien à sa définition (2); dès lors, les identités (4) ont lieu, en sorte que $f(z)$ est nul à cause de (6). Nous avons donc démontré que l'on obtient les racines de $f(z)$ en résolvant l'équation (5) du sixième degré en y, puis l'équation (6) du second degré en z.

708. Si l'on considère une fonction symétrique de deux racines de l'équation $f(z)=0$ qui correspondent aux deux éléments d'une même ligne et, par suite, à une même racine y de $\Theta(y)=0$, elle s'exprimera rationnellement au moyen de la somme et du produit des racines de l'équation (6), c'est-à-dire en fonction de la racine y considérée; cette fonction symétrique dépendra donc d'une équation du sixième degré. Tel est le cas, par exemple, pour l'expression (LXXXVI$_5$),

$$\sqrt{l}=(\sqrt{k})^5\,\frac{\mathrm{cn}^2\frac{2K}{5}\,\mathrm{cn}^2\frac{4K}{5}}{\mathrm{dn}^2\frac{2K}{5}\,\mathrm{dn}^2\frac{4K}{5}};$$

en supposant que y soit $k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{2K}{5}\,\mathrm{sn}^2\frac{4K}{5}$, les deux racines de l'équation (6) seront $k\,\mathrm{sn}^2\frac{2K}{5}$, $k\,\mathrm{sn}^2\frac{4K}{5}$ et leur somme sera $\frac{4\rho y}{1+4y-y^2}$; on en déduit

$$\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{k}}=\frac{k^2-\dfrac{4\rho k y}{1+4y-y^2}+y}{1-\dfrac{4\rho k y}{1+4y-y^2}+k^2 y};$$

en remplaçant, dans le second membre, ρ par $k+\frac{1}{k}$, et en supprimant en haut et en bas le facteur $y-1$, on trouve sans peine

$$\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{k}}=\frac{k^2+\mathfrak{Y}}{1-k^2\mathfrak{Y}},$$

où

$$\mathfrak{Y}=\frac{y^2-3y}{1+y};$$

en éliminant y entre $\Theta(y) = 0$ et l'équation qui définit $\mathfrak{J}$, on obtient sans difficulté l'équation en $\mathfrak{J}$, puis l'équation en $\sqrt{l}$.

709. Si l'on veut former l'équation qui a pour racines $\varphi(5\tau)$, on constatera d'abord, comme dans le cas de $n = 3$, que

$$T = \frac{\varphi(5\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{\sqrt[4]{l}}{\sqrt[4]{k}}$$

est une fonction rationnelle de y. On a, en effet,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{k}} &= \frac{(k^2+\mathfrak{J})(k^2\mathfrak{J}+1)}{(k^2\mathfrak{J}+1)^2}\\ &= \frac{k^2[(y^2-3y)^2+(\rho^2-2)(y^2-3y)(y+1)+(y+1)^2]}{[y+1+k^2(y^2-3y)]^2};\end{aligned}$$

en remplaçant, dans le numérateur, $\rho^2 y$ par la valeur tirée de l'équation $\Theta(y) = 0$, on trouve, après des réductions faciles,

$$\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{k}} = \frac{k^2}{16}\left[\frac{(1+4y-y^2)(1-y)^2}{y+1+k^2(y^2-3y)}\right]^2;$$

en extrayant les racines carrées et en choisissant le signe de manière que le second membre soit, comme T, positif pour de grandes valeurs positives de $\frac{\tau}{i}$, on obtient

$$T = \frac{\varphi(5\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{k}{4}\,\frac{(1+4y-y^2)(1-y)^2}{y+1+k^2(y^2-3y)}.$$

Ceci posé, on a à éliminer y entre les deux équations

$$\Theta(y) = 0, \qquad 4[(y+1)+k^2(y^2-3y)]T - k(1+4y-y^2)(1-y)^2 = 0;$$

en remplaçant y par $1-\lambda$, on est ramené à éliminer λ entre les équations

$$\begin{gathered}\Theta(1-\lambda) = \lambda^6 + 4\lambda^5 + 16\mu^2(\lambda-1) = 0,\\ \lambda^4 + 2\lambda^3 + 4(kT-1)\lambda^2 + 4\mu T(\lambda-2) = 0,\end{gathered}$$

où l'on a écrit, pour abréger, μ au lieu de $k - \frac{1}{k}$; la première de ces deux équations se simplifie en ajoutant le premier membre de la seconde multiplié par $-\lambda^2 - 2\lambda$; on est alors ramené à éliminer λ entre deux équations du quatrième degré

$$\begin{gathered}kT\lambda^4 + (2kT+\mu T)\lambda^3 - 4\mu(T+\mu)\lambda + 4\mu^2 = 0,\\ \lambda^4 + 2\lambda^3 + 4(kT-1)\lambda^2 + 4\mu T\lambda - 8\mu T = 0.\end{gathered}$$

En appliquant la méthode de Bézout et en combinant les lignes et les colonnes de manière à simplifier le déterminant du quatrième ordre auquel elle conduit, on parvient aisément à un déterminant du quatrième ordre dont sept éléments sur seize sont nuls, et que l'on n'a donc aucune peine à développer; on trouve ainsi, en supprimant des facteurs μ et $(1+k^2)$,

$$-kT^6+4k^2T^5-5kT^4+5kT^2-4T+k=0.$$

En posant $\varphi(5\tau)=-v$, $\varphi(\tau)=u$, donc $T=-\frac{v}{u}$, on trouve finalement [1]

$$u^6-v^6+4uv(1-u^4v^4)+5u^2v^2(u^2-v^2)=0.$$

On parviendrait à la même équation en suivant la méthode appliquée au n° 698 pour $n=3$.

710. On peut mettre cette équation sous la forme $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, en posant

$$A=u^4+6u^2v^2+v^4,\quad B=4uv(u^2+v^2),\quad C=1-u^4v^4,\quad D=v^4-u^4;$$

on peut donc aussi la mettre sous la forme

$$\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D},$$

où

$$\begin{aligned}
A+B&=(u+v)^4,\\
A-B&=(u-v)^4,\\
C+D&=(1-u^4)(1+v^4),\\
C-D&=(1+u^4)(1-v^4).
\end{aligned}$$

C'est la forme que Legendre lui a donnée. Dans son *Supplément aux Fonctions elliptiques*, p. 75, il établit, en effet, l'équation

$$\left(\frac{\sqrt[4]{k}+\sqrt[4]{l}}{\sqrt[4]{k}-\sqrt[4]{l}}\right)^4=\frac{1+k}{1-k}\,\frac{1-l}{1+l}.$$

De l'équation modulaire obtenue au n° 709 on déduit aisément

---

[1] JACOBI, *Fundamenta; Œuvres*, t. I, p. 78.

la relation

$$\begin{aligned}
&[1-\varphi^8(\tau)][1-\varphi^8(5\tau)] = (1-u^8)(1-v^8)\\
&= [(1-u^4)(1+v^4)][(1-v^4)(1+u^4)]\\
&= (1-u^4v^4+v^4-u^4)(1-u^4v^4+u^4-v^4)\\
&= \frac{u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)-4uv(v^4-u^4)}{-4uv}\\
&\quad\times\frac{u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)-4uv(u^4-v^4)}{-4uv}\\
&= \frac{(u^2-v^2)^2(u+v)^4(u-v)^4}{16u^2v^2} = \frac{(u^2-v^2)^6}{16u^2v^2} = \frac{[\varphi^2(\tau)-\varphi^2(5\tau)]^6}{16\varphi^2(\tau)\varphi^2(5\tau)};
\end{aligned}$$

d'après une remarque faite au n° 692, on a donc aussi

$$[1-\psi^8(5\tau)][1-\psi^8(\tau)] = \frac{[\psi^2(5\tau)-\psi^2(\tau)]^6}{16\psi^2(\tau)\psi^2(5\tau)}.$$

Si l'on divise ces deux relations, membre à membre, et que l'on tienne compte des égalités

$$\varphi^8(\tau)+\psi^8(\tau)=1, \qquad \varphi^8(5\tau)+\psi^8(5\tau)=1,$$

on obtient la relation

$$\frac{\psi^6(\tau)\psi^6(5\tau)}{\varphi^6(\tau)\varphi^6(5\tau)} = \left[\frac{\varphi^2(\tau)-\varphi^2(5\tau)}{\psi^2(\tau)-\psi^2(5\tau)}\right]^6;$$

d'où, en extrayant la racine sixième des deux membres et choisissant les déterminations par la considération des développements suivant les puissances de q ($\mathrm{XXXVIII}_1$),

$$\frac{\psi(\tau)\psi(5\tau)}{\varphi(\tau)\varphi(5\tau)} + \frac{\varphi^2(\tau)-\varphi^2(5\tau)}{\psi^2(\tau)-\psi^2(5\tau)} = 0.$$

C'est la forme même donnée par Jacobi à l'équation modulaire au § 30 de ses *Fundamenta* (1), savoir :

$$(\sqrt{k}-\sqrt{l})\sqrt[4]{k}\sqrt[4]{l} + (\sqrt{k'}-\sqrt{l'})\sqrt[4]{k'}\sqrt[4]{l'} = 0.$$

711. Dans la formule (LVIII_1) posons $\alpha = 1$, $\beta = 5$, et prenons d'une part $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{5}{4}$, d'autre part $x=\frac{3}{4}$, $y=\frac{3}{4}$; ajoutons les deux formules ainsi obtenues; transformons, comme dans le cas de $n=3$, par la formule (XL_1), les produits de $\mathfrak{I}$ qui figurent dans

(1) *Œuvres*, t. I, p. 125.

le premier membre, en sommes de $\mathfrak{S}$; enfin, exprimons les $\mathfrak{S}$ de l'argument $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ ou $\frac{5}{2}$ par les $\mathfrak{S}$ de l'argument o; nous obtiendrons ainsi la relation

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_4(0|\tau)\mathfrak{S}_4(0|10\tau) = \mathfrak{S}_4(0|3\tau)\mathfrak{S}_3(0|15\tau) - q^2\mathfrak{S}_4(\tau|3\tau)\mathfrak{S}_3(5\tau|15\tau)\\ + q^8\mathfrak{S}_4(2\tau|3\tau)\mathfrak{S}_3(10\tau|15\tau).\end{aligned}$$

De même, prenons dans la même formule écrite pour $\alpha = 1$, $\beta = 5$, d'une part $x = \frac{1}{4}$, $y = -\frac{1}{4}$; d'autre part $x = \frac{3}{4}$, $y = -\frac{3}{4}$; ajoutons les deux formules ainsi obtenues; réduisons au moyen de la formule (XL_1), et nous aurons la relation

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_4(0|2\tau)\mathfrak{S}_4(0|10\tau) = \mathfrak{S}_3(0|3\tau)\mathfrak{S}_4(0|15\tau) - q^2\mathfrak{S}_3(\tau|3\tau)\mathfrak{S}_4(5\tau|15\tau)\\ + q^8\mathfrak{S}_3(2\tau|3\tau)\mathfrak{S}_4(10\tau|15\tau).\end{aligned}$$

Pour $x = -\frac{\tau}{2}$, $y = -\frac{5\tau}{2}$ d'une part, et $x = -\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}$, $y = -\frac{5\tau}{2} - \frac{1}{2}$ d'autre part, on parvient de même à la relation

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)\mathfrak{S}_2\left(0\,\middle|\,\frac{5\tau}{2}\right) = 2\mathfrak{S}_2(0|3\tau)\mathfrak{S}_3(0|15\tau) + 2q^2\mathfrak{S}_2(\tau|3\tau)\mathfrak{S}_3(5\tau|15\tau)\\ + 2q^8\mathfrak{S}_2(2\tau|3\tau)\mathfrak{S}_3(10\tau|15\tau),\end{aligned}$$

tandis que pour $x = -\frac{5\tau}{2}$, $y = \frac{5\tau}{2}$ d'une part, et $x = -\frac{5\tau}{2} + \frac{1}{2}$, $y = \frac{5\tau}{2} - \frac{1}{2}$ d'autre part, on obtient la relation

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)\mathfrak{S}_2\left(0\,\middle|\,\frac{5\tau}{2}\right) = 2\mathfrak{S}_3(0|3\tau)\mathfrak{S}_2(0|15\tau) + 2q^2\mathfrak{S}_3(\tau|3\tau)\mathfrak{S}_2(5|15\tau)\\ + 2q^8\mathfrak{S}_3(2\tau|3\tau)\mathfrak{S}_2(10\tau|15\tau).\end{aligned}$$

Ces quatre relations, déduites toutes les quatre de la même formule (LVIII_1) pour $\alpha = 1$, $\beta = 5$, vont nous fournir aisément l'équation modulaire pour $n = 5$. Nous avons établi (n^{os} 699, 700), pour $\mu = 0, 1, 2$, la relation

$$\mathfrak{S}_3(0|\tau)\mathfrak{S}_3(\mu\tau|3\tau) = \mathfrak{S}_2(0|\tau)\mathfrak{S}_2(\mu\tau|3\tau) + (-1)^\mu\mathfrak{S}_4(0|\tau)\mathfrak{S}_4(\mu\tau|3\tau),$$

d'où l'on déduit, en changeant τ en 5τ, la relation

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2(0|5\tau)\mathfrak{S}_2(5\mu\tau|15\tau) + (-1)^\mu\mathfrak{S}_4(0|5\tau)\mathfrak{S}_4(5\mu\tau|15\tau)\\ = \mathfrak{S}_3(0|5\tau)\mathfrak{S}_3(5\mu\tau|15\tau);\end{aligned}$$

multiplions ces deux relations membre à membre et par $q^{2\mu^2}$; si dans l'égalité ainsi obtenue on donne à μ les valeurs 0, 1, 2, on

obtient trois relations que nous ajouterons membre à membre; nous parviendrons ainsi à la relation

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{S}_3(o\,|\,\tau)\,\mathfrak{S}_2(o\,|\,5\tau)\sum_{\mu=0}^{\mu=2} q^{2\mu^2}\,\mathfrak{S}_3(\mu\tau\,|\,3\tau)\,\mathfrak{S}_2(5\mu\tau\,|\,15\tau)\\
&+\mathfrak{S}_3(o\,|\,\tau)\,\mathfrak{S}_4(o\,|\,5\tau)\sum_{\mu=0}^{\mu=2}(-1)^{\mu} q^{2\mu^2}\,\mathfrak{S}_3(\mu\tau\,|\,3\tau)\,\mathfrak{S}_4(5\mu\tau\,|\,15\tau)\\
=\;&\mathfrak{S}_2(o\,|\,\tau)\,\mathfrak{S}_3(o\,|\,5\tau)\sum_{\mu=0}^{\mu=2} q^{2\mu^2}\,\mathfrak{S}_2(\mu\tau\,|\,3\tau)\,\mathfrak{S}_3(5\mu\tau\,|\,15\tau)\\
&+\mathfrak{S}_4(o\,|\,\tau)\,\mathfrak{S}_3(o\,|\,5\tau)\sum_{\mu=0}^{\mu=2}(-1)^{\mu} q^{2\mu^2}\,\mathfrak{S}_4(\mu\tau\,|\,3\tau)\,\mathfrak{S}_3(5\mu\tau\,|\,15\tau),
\end{aligned}
$$

dans laquelle figurent précisément les quatre sommes, de trois termes chacune, que nous venons d'exprimer au moyen d'un produit de deux fonctions $\mathfrak{S}(o)$; si l'on remplace ces quatre sommes par leurs valeurs, on obtient la relation

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_3(o\,|\,\tau)\,\mathfrak{S}_2(o\,|\,5\tau)-\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_2(o\,|\,\tau)\,\mathfrak{S}_3(o\,|\,5\tau)\right]\mathfrak{S}_2\left(o\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)\mathfrak{S}_2\left(o\,\middle|\,\frac{5\tau}{2}\right)\\
=\;&[\;\mathfrak{S}_4(o\,|\,\tau)\,\mathfrak{S}_3(o\,|\,5\tau)-\;\mathfrak{S}_3(o\,|\,\tau)\,\mathfrak{S}_4(o\,|\,5\tau)]\;\mathfrak{S}_4(o\,|\,2\tau)\,\mathfrak{S}_4(o\,|\,10\tau);
\end{aligned}
$$

il suffit d'appliquer les formules de transformation (XLVII), (XLVIII) pour $n=2$, pour apercevoir l'identité de cette relation [1] avec l'équation modulaire proprement dite pour $n=5$.

---

[1] La même formule (LVIII_1) fournit un procédé très rapide pour parvenir à l'une des formes de l'équation modulaire pour $n=7$. Prenons, à cet effet, dans cette formule $\alpha=1$, $\beta=7$ et d'une part $x=\frac{1}{4}$, $y=-\frac{1}{4}$, d'autre part $x=\frac{3}{4}$, $y=-\frac{3}{4}$, et ajoutons les deux formules ainsi obtenues. Réduisons le premier membre par la formule (XL_1) appliquée à chacune des quatre fonctions $\mathfrak{S}$ qui y figurent; on aura

$$
\begin{aligned}
&2\,\mathfrak{S}_4(o\,|\,4\tau)\,\mathfrak{S}_4(o\,|\,28\tau)\\
&\quad=2\,\mathfrak{S}_3(o\,|\,8\tau)\,\mathfrak{S}_3(o\,|\,56\tau)-2q^4\,\mathfrak{S}_3(2\tau\,|\,8\tau)\,\mathfrak{S}_3(14\tau\,|\,56\tau)\\
&\qquad+2q^{16}\,\mathfrak{S}_3(4\tau\,|\,8\tau)\,\mathfrak{S}_3(28\tau\,|\,56\tau)-2q^{36}\,\mathfrak{S}_3(6\tau\,|\,8\tau)\,\mathfrak{S}_3(42\tau\,|\,56\tau).
\end{aligned}
$$

Faisons aussi dans la même formule (LVIII_1), écrite pour $\alpha=1$, $\beta=7$, d'une part $x=0$, $y=0$, d'autre part $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$, ajoutons, réduisons le premier

§ VI. — Division d'une boucle de lemniscate en 3, 4 ou 5 parties égales.

712. Le problème de la division d'une boucle de lemniscate en parties égales se ramène immédiatement à la recherche des valeurs de $p\left(\frac{2\omega_1}{n}\middle|\omega_1,\ \omega_3\right)$ dans le cas particulier où les invariants g_2, g_3 sont respectivement égaux à 4 et 0. Si l'on prend le demi-axe a de la lemniscate pour unité de longueur, la longueur d'une boucle de lemniscate est, en effet (n° 649), égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}\,2\mathrm{K}$ ou $2\omega_1$ pour $g_2=4$, $g_3=0$, en sorte que la longueur $l-s$ de la $n^{\text{ième}}$ partie

---

membre par la formule (XL_1); nous aurons

$$\begin{aligned}&2\mathfrak{S}_2(0|4\tau)\,\mathfrak{S}_2(0|28\tau)+2\mathfrak{S}_3(0|4\tau)\,\mathfrak{S}_3(0|28\tau)\\&\quad=2\mathfrak{S}_3(0|8\tau)\,\mathfrak{S}_3(0|56\tau)+2q^4\,\mathfrak{S}_3(2\tau|8\tau)\,\mathfrak{S}_3(14\tau|56\tau)\\&\qquad+2q^{16}\,\mathfrak{S}_3(4\tau|8\tau)\,\mathfrak{S}_3(28\tau|56\tau)+2q^{36}\,\mathfrak{S}_3(6\tau|8\tau)\,\mathfrak{S}_3(42\tau|56\tau).\end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre les deux formules ainsi obtenues et remplaçant ensuite τ par $\frac{\tau}{4}$, nous obtenons la relation cherchée

$$\begin{aligned}&\mathfrak{S}_2(0|\tau)\,\mathfrak{S}_2(0|7\tau)+\mathfrak{S}_3(0|\tau)\,\mathfrak{S}_3(0|7\tau)+\mathfrak{S}_4(0|\tau)\,\mathfrak{S}_4(0|7\tau)\\&\quad=2\mathfrak{S}_2(0|2\tau)\,\mathfrak{S}_2(0|14\tau)+2\mathfrak{S}_3(0|2\tau)\,\mathfrak{S}_3(0|14\tau).\end{aligned}$$

En tenant compte des formules (XXXVII) on peut l'écrire

$$1+\sqrt{k}\,\sqrt{l}+\sqrt{k'}\,\sqrt{l'}=\sqrt{1+k'}\,\sqrt{1+l'}+\sqrt{1-k'}\,\sqrt{1-l'}.$$

En élevant au carré les deux membres de cette relation, on en déduit aisément la relation

$$[1-\varphi^2(\tau)\,\varphi^2(7\tau)-\psi^2(\tau)\,\psi^2(7\tau)]^2=4\varphi^2(\tau)\,\varphi^2(7\tau)\,\psi^2(\tau)\,\psi^2(7\tau);$$

si l'on extrait la racine carrée et si l'on détermine le signe en développant les deux membres suivant les puissances de q, au moyen des formules (XXXVIII), on voit que le carré de l'expression $\varphi(\tau)\,\varphi(7\tau)+\psi(\tau)\,\psi(7\tau)$ est égal à 1; cette expression elle-même est donc aussi égale à 1, comme on le voit, en observant que, d'après les formules (XXXVIII), elle se réduit à $+1$ pour $q=0$.

L'équation modulaire ainsi obtenue

$$\varphi(\tau)\,\varphi(7\tau)+\psi(\tau)\,\psi(7\tau)=1$$

se présente sous une forme particulièrement élégante. Comparez *Journal de Liouville*, 2ᵉ sér., t. III, p. 261; 1858.

de la boucle, comptée à partir du point double de la lemniscate, est égale à $\frac{2\omega_1}{n}$; les valeurs réciproques ρ des carrés des distances du point double aux $(n-1)$ points de division sont donc données par les $(n-1)$ expressions que prend $\rho = p\frac{2h\omega_1}{n}$ pour $h = 1$, $2, \ldots, n-1$.

Pour $n=2$, il n'y a pas de problème; pour $n=4$, on a immédiatement (n° 676)

$$p\frac{\omega_1}{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad p\frac{\omega_3}{2} = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad p\frac{\omega_3 \pm \omega_1}{2} = \mp\frac{i}{2}.$$

Pour $n=3$, on déduit de même des formules (n° 702)

$$\mathcal{G} = 4, \qquad \Gamma = -2, \qquad \varepsilon = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2},$$

$$a = 0, \qquad b = \frac{3+i\sqrt{3}}{6}, \qquad c = \frac{3-i\sqrt{3}}{6},$$

d'où

$$\sqrt{a} = 0, \qquad \sqrt{b} = \tfrac{1}{6}\sqrt[4]{27}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right),$$
$$\sqrt{c} = \tfrac{1}{6}\sqrt[4]{27}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right),$$

en sorte que l'on a

$$p\frac{2\omega_1}{3} = \frac{1}{3}\sqrt[4]{27}\sqrt{2+\sqrt{3}}, \qquad p\frac{2\omega_3}{3} = -\frac{1}{3}\sqrt[4]{27}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$
$$p\frac{2\omega_3 \pm 2\omega_1}{3} = \mp\frac{i}{3}\sqrt[4]{27}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Ces mêmes résultats se lisent, d'ailleurs, aisément sur l'équation $f(y)=0$ que l'on déduit de la relation $\Psi_3(u)=0$ par la substitution $y = pu$; cette équation se réduit, en effet, pour $g_2 = 4$, $g_3 = 0$, à l'équation bicarrée $3y^4 - 6y^2 - 1 = 0$.

Pour $n=5$, l'équation du sixième degré en P se réduit à

$$P^6 - 20P^4 - 80P^2 = 0;$$

elle admet donc la racine double $P=0$ et les quatre racines simples $P = \sqrt{10+6\sqrt{5}}$ où chacun des radicaux a deux déterminations. A la valeur $P=0$ correspondent les deux valeurs $Q = \frac{-1\pm 2i}{5}$, racines de la seconde équation (2) du n° 703, pour

$g_2 = 4$, $g_3 = 0$. Aux quatre racines simples P correspondent deux valeurs de Q données par la relation $Q = \frac{1}{6}P^2 + \frac{1}{3} = 2 + \sqrt{5}$. Les douze valeurs de $pa_{p,q}$ seront donc les douze valeurs que prennent les expressions

$$\sqrt{\frac{-1+\sqrt{-1}}{5}}, \quad \frac{1}{2}\left(\sqrt{6\sqrt{5}+10} + \sqrt{2\sqrt{5}+2}\right),$$

quand on donne aux radicaux qui y figurent leurs deux déterminations.

Ces formules mettent en évidence ce fait que la division d'une boucle de lemniscate en 3, 4 ou 5 parties égales peut être effectuée *à l'aide de la règle et du compas seulement,* tout comme la division de la circonférence du cercle en 3, 4 ou 5 parties égales. Ce parallélisme entre les deux problèmes se poursuit, d'ailleurs, pour tous les nombres premiers impairs n, et c'est à lui que Gauss fait allusion au début de la septième Section des *Disquisitiones arithmeticæ.*

713. Il n'est peut-être pas inutile de faire observer que, pour déduire les mêmes résultats de l'équation $\Theta(y) = 0$ [équation (5) du n° 707], on ne saurait prendre pour k^2 la valeur $\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{1}{2}$ trouvée au n° 649; pour passer de l'équation en pu à l'équation en $\operatorname{sn}^2 u$, on a, en effet, au n° 677, appliqué la formule (XCVI), qui suppose essentiellement $\sqrt{e_1 - e_3} = 1$, en sorte que dans l'équation $\Theta(y) = 0$ la valeur de k^2 est liée à celles de $g_2 = 4$, $g_3 = 0$ par les relations

$$g_2 = \tfrac{4}{3}(k^4 - k^2 + 1), \qquad g_3 = \tfrac{4}{27}(k^2+1)(2k^2-1)(k^2-2)$$

qui sont vérifiées pour $k^2 + 1 = 0$, $k^2 - 2 = 0$, mais non pour $2k^2 - 1 = 0$.

Pour $k = i$, on a $\rho = 0$, et l'équation $\Theta(y) = 0$ est résoluble par radicaux; elle se décompose en

$$1 + 4y - y^2 = 0, \qquad 5 - 2y + y^2 = 0,$$

en sorte que y est, soit de la forme $2 + \sqrt{5}$, soit de la forme $1 + 2\sqrt{-1}$. Les deux quantités $2 + \sqrt{5}$ sont racines doubles de $\Theta(y) = 0$; pour ces valeurs l'équation (6) du n° 707 devient une

identité; les quatre racines de l'équation

$$\left(\frac{y+z^2}{z}\right)^2 - y(y^2-2y+5) = 0, \qquad \text{où} \qquad y = 2+\sqrt{5},$$

sont d'ailleurs racines de l'équation $f(z)=0$; on obtient ainsi huit racines de $f(z)=0$, savoir

$$z = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{30+14\sqrt{5}} + \sqrt{22+10\sqrt{5}}\right),$$

où chaque radical a deux déterminations. Les deux quantités $1+2\sqrt{-1}$ sont racines simples de $\Theta(y)=0$, et les valeurs correspondantes de z sont $\sqrt{1+2\sqrt{-1}}$; on a donc quatre autres racines de l'équation du douzième degré $f(z)=0$.

Pour vérifier que ces douze racines fournissent les mêmes solutions que les douze valeurs de $y = pa_{p,q}$ écrites plus haut, il suffit de se rappeler que $pu = \frac{i}{\operatorname{sn}^2 u}$ et, par conséquent, de vérifier que l'on a

$$\sqrt{1+2\sqrt{-1}}\sqrt{\frac{-1+2\sqrt{-1}}{5}} = \sqrt{-1};$$

$$\left(\sqrt{10+6\sqrt{5}} + \sqrt{2+2\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{14\sqrt{5}-30} - \sqrt{10\sqrt{5}-22}\right) = 4,$$

ce qui n'offre aucune difficulté.

714. Pour fixer celles des douze racines qui sont égales à $p\frac{2\omega_1}{5}$, $p\frac{4\omega_1}{5}$, $p\frac{2\omega_3}{3}$, $p\frac{4\omega_3}{5}$, il suffit d'observer qu'en parcourant dans le sens direct le rectangle dont les sommets sont les points 0, ω_1, $\omega_1+\omega_3$, ω_3, 0, on rencontre successivement les points 0, $\frac{2\omega_1}{5}$, $\frac{4\omega_1}{5}$, $\omega_1, \ldots, \omega_3$, $\frac{4\omega_3}{5}$, $\frac{2\omega_3}{5}$, 0, et que, comme dans ce parcours pu varie de $+\infty$ à $-\infty$ par valeurs décroissantes, on a

$$p\frac{2\omega_1}{5} > p\frac{4\omega_1}{5} > e_1 > 0 > e_3 > p\frac{4\omega_3}{5} > p\frac{2\omega_3}{5};$$

on voit ainsi que

$$p\frac{2\omega_1}{5} = \frac{b+c}{2a}, \quad p\frac{4\omega_1}{5} = \frac{b-c}{2a}, \quad p\frac{4\omega_3}{5} = \frac{-b+c}{2a}, \quad p\frac{2\omega_3}{5} = \frac{-b-c}{2a},$$

en posant, pour abréger,

$$a = |\sqrt{5}| - 2, \qquad b = |\sqrt{14a - 2}|, \qquad c = |\sqrt{10a - 2}|.$$

Les huit autres racines sont imaginaires; on peut les discerner aisément les unes des autres en tenant compte des valeurs des quatre racines que nous venons d'écrire, et en appliquant le théorème d'addition.

§ VII. — Division de l'argument.

715. Le problème de la division de l'argument pour un nombre entier n consiste, pour la fonction pu, à calculer $p\left(\frac{u}{n}; g_2, g_3\right)$ quand on se donne $p(u; g_2, g_3)$. Ce problème a été entièrement résolu pour $n = 2$ par la formule (XVI_1); il ne dépend que d'équations du second degré. Il suffirait, pour le résoudre dans toute sa généralité, de le résoudre complètement pour n premier impair; nous nous attacherons au cas où $n = 5$; la marche à suivre est la même dans le cas général.

Pour $n = 5$, le problème dépend d'une équation de degré 5^2, dont les racines sont les diverses valeurs de $p\left(\frac{u + 2p\omega_1 + 2q\omega_3}{5}\right)$. La formule (CIV_6), en y changeant u en $\frac{u}{5}$, permet immédiatement de former cette équation, et l'on voit de suite que ses coefficients appartiennent au corps Ω formé par les fonctions rationnelles de g_2, g_3 à coefficients entiers. Elle y est irréductible, mais sa résolution peut se ramener à des résolutions d'équations du sixième et du cinquième degré, ces dernières étant résolubles par radicaux. Pour le faire voir, nous étudierons d'abord les transformations inverses de la fonction pu, nous montrerons que ces transformations se ramènent à la résolution de telles équations, puis nous mettrons en évidence que le problème de la division de l'argument se ramène à deux transformations inverses successives.

716. Supposons d'abord que l'on se donne $p\left(u \middle| \frac{\omega_1}{5}, \omega_3\right)$ et les invariants correspondants G_2, G_3, et proposons-nous de calculer la

valeur correspondante de $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$. Nous commencerons par calculer les invariants g_2, g_3 de cette fonction au moyen de G_2, G_3, comme on l'a indiqué au n° 705; nous devrons ensuite résoudre par rapport à pu l'équation du cinquième degré en pu,

$$p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{5}, \omega_3\right) = p(u) + p\left(u + \frac{2\omega_1}{5}\right) + p\left(u + \frac{4\omega_1}{5}\right) + p\left(u + \frac{6\omega_1}{5}\right) + p\left(u + \frac{8\omega_1}{5}\right) - 2P_1,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles, à coefficients entiers, de $p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{5}, \omega_3\right)$, G_2, G_3, P_1, où P_1 est lié à G_2, G_3 par l'équation du sixième degré que l'on a appris à former au n° 705. Cette équation (quand on regarde P_1 comme connu) peut être résolue par radicaux ([1]); ses racines sont, en effet, manifestement

$$x_r = p\left(u + \frac{2r\omega_1}{5}\right), \qquad (r = 0, 1, 2, 3, 4);$$

si donc on désigne par α une racine primitive de l'équation $x^5 - 1 = 0$, on voit de suite que l'expression

$$A_p = (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^4 x_4)^p \times (x_0 + \alpha^{-p} x_1 + \alpha^{-2p} x_2 + \alpha^{-3p} x_3 + \alpha^{-4p} x_4),$$

où p est l'un des nombres 0, 1, 2, 3, 4, ne change pas quand on augmente u de $\frac{2\omega_1}{5}$, ou que l'on fait une permutation circulaire sur x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, car le premier facteur se reproduit, multiplié par $\frac{1}{\alpha^p}$ et le second par $\frac{1}{\alpha^{-p}}$; il suit de là que A_p est une fonction doublement périodique de u, admettant les périodes $\frac{2\omega_1}{5}$ et $2\omega_3$; on voit de suite que c'est une fonction paire de u; c'est donc une fonction rationnelle de $p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{5}, \omega_3\right)$; c'est même une fonction *entière* de $p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{5}, \omega_3\right)$, car dans le parallélogramme des périodes dont les sommets sont $0, \frac{2\omega_1}{5}, \frac{2\omega_1}{5} + 2\omega_3, 2\omega_3$, il n'y a pas d'autre pôle que le point 0 qui est d'ordre de multiplicité

([1]) On démontre toutefois que cette équation, en général, n'est pas abélienne.

$2p+2$; A_p pourra donc s'exprimer par la méthode de décomposition en éléments simples, ou par l'identification des coefficients des diverses puissances de u, au moyen d'une fonction du premier degré de $p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{5}, \omega_3\right)$ et de ses dérivées d'ordre pair $\leqq 2p$, ou par un polynome en $p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{5}, \omega_3\right)$. Il est d'ailleurs aisé de voir qu'on n'introduit pas, sauf α, d'autre irrationalité que celles que l'on a déjà introduites, c'est-à-dire que A_p est un polynome en $p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{5}, \omega_3\right)$, dont les coefficients sont des polynomes en α, P_1, G_2, G_3 à coefficients numériques rationnels. Les polynomes A_p étant formés, on voit que l'on a

$$x_0 + \alpha^{-p}x_1 + \alpha^{-2p}x_2 + \alpha^{-3p}x_3 + \alpha^{-4p}x_4 = \frac{A_p}{(\sqrt[5]{A_4})^p};$$

en ajoutant ces cinq équations membre à membre, on trouve [1]

$$x_0 = \frac{1}{5}\left[A_0 + \frac{A_1}{\sqrt[5]{A_4}} + \frac{A_2}{(\sqrt[5]{A_4})^2} + \frac{A_3}{(\sqrt[5]{A_4})^3} + \frac{A_4}{(\sqrt[5]{A_4})^4}\right].$$

Les autres racines s'obtiennent en remplaçant $\sqrt[5]{A_4}$ par ses diverses déterminations. L'équation proposée se résout donc par radicaux.

Il est à peine utile de dire que le problème qui consiste à trouver $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$ au moyen de $p\left(u \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_3}{5}\right)$ se traite exactement comme celui dont nous avons développé la solution.

717. Ceci posé, revenons au calcul de $p\left(\frac{u}{5} \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right)$, connaissant $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$. La formule d'homogénéité

$$p\left(\frac{u}{5} \,\middle|\, \frac{\omega_1}{5}, \frac{\omega_3}{5}\right) = 5^2 p(u \mid \omega_1, \omega_3)$$

---

(1) Dans le cas général où le nombre 5 est remplacé par le nombre premier impair n, il convient d'observer pour cela que les fonctions *cycliques* entières de $p\left(\frac{2r\omega_1}{n} \,\middle|\, \omega_1, \omega_3\right)$, où $r = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$, comme les fonctions symétriques des mêmes quantités, s'expriment rationnellement au moyen de g_2, g_3 et de la racine correspondante (ici P_1) de l'équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré dont dépend le problème de la division des périodes par n.

montre que l'on peut regarder comme connue la fonction

$$p\left(\frac{u}{5}\,\middle|\,\frac{\omega_1}{5},\frac{\omega_3}{5}\right).$$

Connaissant cette dernière fonction, on calculera $p\left(\frac{u}{5}\,\middle|\,\omega_1,\frac{\omega_3}{5}\right)$; on a pour cela, d'après ce qui a été dit aux nos 705, 716, à résoudre une équation du sixième degré qui ne concerne que les constantes et une équation du cinquième degré résoluble par radicaux. Ayant obtenu $p\left(\frac{u}{5}\,\middle|\,\omega_1,\frac{\omega_3}{5}\right)$, on calculera $p\left(\frac{u}{5}\,\middle|\,\omega_1,\omega_3\right)$; il semble qu'on ait encore à résoudre une équation du sixième degré, mais on évite cette résolution puisque l'on connaît à la fois les invariants de $p\left(\frac{u}{5}\,\middle|\,\omega_1,\frac{\omega_3}{5}\right)$ et ceux de $p\left(\frac{u}{5}\,\middle|\,\omega_1,\omega_3\right)$, qui sont les données g_2, g_3; on n'a donc qu'à résoudre (par radicaux) une nouvelle équation du cinquième degré.

718. Des considérations analogues s'appliquent à la division de l'argument pour la fonction $\operatorname{sn} u$; le calcul de $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{n}\right)$, connaissant $\operatorname{sn} u$, est entièrement résolu pour $n=2$ par les formules du n° 334; il se ramène, pour n premier impair quelconque, à deux transformations inverses de la fonction $\operatorname{sn} u$.

Si, dans la formule (LXXXVII$_4$), on regarde $\operatorname{sn}(u\,|\,\tau)$ comme l'inconnue et $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}\,\middle|\,n\tau\right)$ comme donnée, l'équation

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}\,\middle|\,n\tau\right)=\frac{1}{M}\operatorname{sn} u\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1-\dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a_{r,0}}}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a_{r,0}\operatorname{sn}^2 u}$$

est du degré n en $\operatorname{sn} u$. Désignons par Ω_0 le corps formé des fonctions rationnelles de $\varphi(\tau)$, $\varphi(n\tau)$, à coefficients entiers; on rappelle que $\varphi(\tau)$, $\varphi(n\tau)$ sont liées entre elles par l'équation modulaire, de degré $n+1$ par rapport à chacune de ces deux quantités. Les fonctions symétriques entières des quantités $\operatorname{sn}^2 a_{r,0}$ qui figurent dans l'équation (LXXXVII$_4$) appartiennent, ainsi que M, à ce corps. La fonction $\varphi(n\tau)$ doit être regardée comme donnée en même temps que la fonction $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}\,\middle|\,n\tau\right)$, et c'est par rapport

à $\varphi(\tau)$ que l'équation modulaire doit d'abord être résolue; puis l'équation ($\mathrm{LXXXVII}_4$) doit être résolue par rapport à $\mathrm{sn}(u\,|\,\tau)$: en se reportant à l'équation ($\mathrm{LXXXVII}_1$), on voit que les racines de l'équation en $\mathrm{sn}(u\,|\,\tau)$ sont de la forme

$$x_r = \mathrm{sn}\left(u + \frac{2r\mathrm{K}}{n}\right) \quad (r = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

et il n'est pas difficile d'en conclure qu'elles s'obtiennent encore par l'extraction d'une racine $n^{\text{ième}}$.

Le multiplicateur M est donné par la dernière des formules (LXXXVI_5); cette formule, en y remplaçant sn par son expression (LXXI_6) au moyen des fonctions $\mathfrak{S}$, donne de suite

$$\mathrm{M} = \frac{\varphi^2(n\tau)}{\varphi^2(\tau)} \prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathfrak{S}_4^2\left(\frac{r}{n}\right)}{\mathfrak{S}_1^2\left(\frac{r}{n}\right)};$$

en utilisant ensuite les formules (LI_2), (XXXVI_2), on arrive sans peine à l'expression

$$(1) \qquad \mathrm{M} = \frac{1}{n}\,\frac{\mathfrak{S}_3^2(0\,|\,\tau)}{\mathfrak{S}_3^2(0\,|\,n\tau)};$$

cette formule met bien en évidence la façon dont M dépend de τ.

Le problème qui consiste à trouver $\mathrm{sn}(u\,|\,\tau)$, connaissant $\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M}\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)$, se résoudra de même au moyen des formules (LXXXIX_4), après que l'on aura calculé $\varphi(\tau)$ au moyen de l'équation modulaire du degré $n+1$, qui lie $\varphi(\tau)$ et $\varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)$. Au moyen des formules ($\mathrm{LXXXVIII}_5$), (LII_2), etc., on trouvera aussi

$$(2) \qquad M = \frac{\mathfrak{S}_3^2(0\,|\,\tau)}{\mathfrak{S}_3^2\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)}.$$

Ceci posé, connaissant $\mathrm{sn}(u\,|\,\tau)$, on commencera par calculer $\mathrm{sn}\left(mu\,\middle|\,\frac{\tau}{n}\right)$, où l'on a écrit, pour abréger, m pour désigner le multiplicateur M dans lequel on aurait remplacé τ par $\frac{\tau}{n}$; c'est le problème de transformation inverse dont nous venons de parler.

Il exige d'abord la résolution par rapport à $\varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)$ de l'équation modulaire de degré $n+1$ entre $\varphi(\tau)$ et $\varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)$, puis la résolution, possible par radicaux, d'une équation de degré n en $\operatorname{sn}\left(mu \,\middle|\, \frac{\tau}{n}\right)$. Connaissant $\operatorname{sn}\left(mu \,\middle|\, \frac{\tau}{n}\right)$, on calculera $\operatorname{sn}(mm'u \,|\, \tau)$, où l'on a écrit m' au lieu de M; ce problème se résout au moyen de l'équation (LXXXIX_4) et peut être effectué par radicaux. Comme, d'après les formules (1) et (2), on a

$$mm' = \frac{1}{n},$$

on a ainsi obtenu $\operatorname{sn}\left(\frac{u}{n} \,\middle|\, \tau\right)$ et le problème de la division de l'argument est résolu pour la fonction sn.

§ VIII. — Multiplication complexe.

719. Quel que soit le nombre entier n que l'on envisage, la fonction $p(nu)$ s'exprime rationnellement (nº 460) au moyen de pu, en sorte que les périodes de pu sont des périodes de $p(nu)$. Si un nombre complexe μ, pour un couple de périodes données $2\omega_1$, $2\omega_3$, jouit de la même propriété, en sorte que les périodes de $p(u \,|\, \omega_1, \omega_3)$ soient des périodes de $p(\mu u \,|\, \omega_1, \omega_3)$, on dit qu'il y a une *multiplication complexe* de la fonction pu par le nombre μ, pour le couple de périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$.

Soit μ un tel nombre complexe et désignons par $\psi(u)$ la fonction $p(\mu u \,|\, \omega_1, \omega_3)$; puisque $\psi(u)$ admet les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$, $\psi(u)$ est une fonction rationnelle de $p(u \,|\, \omega_1, \omega_3)$, $p'(u \,|\, \omega_1, \omega_3)$; $\psi(u)$, étant une fonction paire de u, est donc une fonction rationnelle de $p(u \,|\, \omega_1, \omega_3)$ seulement.

720. Puisque les périodes de la fonction $p(u \,|\, \omega_1, \omega_3)$ sont des périodes de la fonction $p(\mu u \,|\, \omega_1, \omega_3)$, il est clair que $2\mu\omega_1$, $2\mu\omega_3$ sont des périodes de la fonction $p(u \,|\, \omega_1, \omega_3)$; on doit donc avoir, en désignant par α, β, γ, δ des entiers réels tels que $\alpha\delta - \beta\gamma$ soit

différent de zéro, des relations de la forme

$$(1) \qquad \mu\omega_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3, \qquad \mu\omega_3 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3.$$

Réciproquement, des relations de cette forme montrent évidemment que la fonction $p(\mu u \mid \omega_1, \omega_3)$ admet les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$, et que, par conséquent, il y a, en vertu de la définition, multiplication complexe par le nombre complexe μ, pour le couple de périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$.

Les égalités (1) peuvent s'écrire

$$\omega_1 = \alpha\Omega_1 + \beta\Omega_3, \qquad \omega_3 = \gamma\Omega_1 + \delta\Omega_3,$$

en posant

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1}{\mu}, \qquad \Omega_3 = \frac{\omega_3}{\mu};$$

il y a donc *transformation* entre les deux fonctions $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$ et $p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$, et l'on voit encore de cette façon que $p(u \mid \Omega_1, \Omega_3)$ ou $\mu^2 p(\mu u \mid \omega_1, \omega_3)$ est une fonction rationnelle de $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$.

Les équations (1) étant homogènes en ω_1, ω_3, il est clair que, s'il y a multiplication complexe par μ, pour le couple de périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$, il y aura aussi multiplication complexe par le même nombre μ, pour le couple de périodes $2\lambda\omega_1$, $2\lambda\omega_3$, quel que soit λ; on parlera donc de multiplication complexe par μ et pour un rapport de périodes τ.

En résumé, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait multiplication complexe pour* τ *et par* μ (τ et μ étant des nombres complexes donnés) *est que les équations*

$$(2) \qquad \mu = \alpha + \beta\tau, \qquad \mu\tau = \gamma + \delta\tau$$

soient vérifiées pour quatre entiers α, β, γ, δ.

On observera que β, γ et $\alpha\delta - \beta\gamma$ sont nécessairement différents de zéro. On peut supposer β positif, quitte à changer le signe des cinq quantités α, β, γ, δ, μ.

721. Des conditions (2) il résulte immédiatement que, s'il y a multiplication complexe par μ et pour τ, il y a aussi multiplication complexe par tout nombre de la forme $a + b\mu$, où a et b sont des entiers réels quelconques.

On peut d'ailleurs retrouver ce résultat par le raisonnement suivant :

D'après la formule d'addition de la fonction p, l'expression $p(au + b\mu u)$ est une fonction rationnelle de $p(au)$, $p(b\mu u)$ et du produit $p'(au).p'(b\mu u)$; mais $p(\mu u)$ est, par hypothèse, une fonction rationnelle de pu, en sorte que $p'(\mu u)$ est le produit, par $p'u$, d'une fonction rationnelle de pu; donc, comme $p'(au)$ est le produit de $p'u$ par une fonction rationnelle de pu, et que $p'(b\mu u)$ est le produit de $p'(\mu u)$ par une fonction rationnelle de $p(\mu u)$, l'expression $p'(au).p'(b\mu u)$ s'exprimera par une fonction rationnelle de pu seulement; il en est donc de même de $p(au + b\mu u)$.

722. Des équations (2), on déduit

$$\tau = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau},$$

$$-\gamma + (\alpha - \delta)\tau + \beta\tau^2 = 0;$$

si donc, en désignant par ρ le plus commun diviseur des valeurs absolues des nombres $-\gamma$, $\alpha - \delta$, β, on pose

$$-\gamma = a\rho, \qquad \alpha - \delta = b\rho, \qquad \beta = c\rho,$$

on définit trois nombres entiers a, b, c jouissant des propriétés suivantes : a et c sont différents de zéro; c est positif; on a

$$a + b\tau + c\tau^2 = 0;$$

comme τ n'est pas réel, on a nécessairement

$$b^2 - 4ac < 0;$$

a est donc positif. Si l'on pose

$$\alpha + \delta = \rho_1, \qquad m = 4ac - b^2,$$

on aura

$$\alpha = \frac{\rho_1 + b\rho}{2}, \qquad \beta = c\rho, \qquad \gamma = -a\rho, \qquad \delta = \frac{\rho_1 - b\rho}{2},$$

et, par suite,

$$n = \alpha\delta - \beta\gamma = \frac{m\rho^2 + \rho_1^2}{4}, \qquad \mu = \alpha + \beta\tau = \frac{\rho_1 + i\rho\sqrt{m}}{2},$$

où le radical est pris, comme dans ce qui suit, avec sa détermination arithmétique. On observera que le nombre entier n est la *norme* du nombre complexe μ.

723. Inversement, supposons qu'on se donne les entiers a, b, c, tels que $4ac - b^2 = m$ soit positif, et les nombres entiers ρ, ρ_1, dont le premier est positif, et tels que $\rho_1 \pm b\rho$ soit pair; les expressions précédemment écrites de α, β, γ, δ au moyen de a, b, c, ρ, ρ_1 définissent une multiplication complexe par le nombre

$$\mu = \frac{\rho_1 + i\rho\sqrt{m}}{2},$$

pour la racine de l'équation

$$a + b\tau + c\tau^2 = 0,$$

dont la partie purement imaginaire est positive, ainsi qu'on le voit de suite en retournant les raisonnements précédents.

724. Au lieu du multiplicateur μ on peut introduire, pour le même τ, le multiplicateur

$$M = \frac{-\varepsilon + i\sqrt{m}}{2},$$

ε étant égal à 0 ou à 1, suivant que b est pair ou impair; μ est lié à M par la relation

$$\mu - \rho M = \alpha - \frac{b - \varepsilon}{2}\rho,$$

où $\frac{b-\varepsilon}{2}$ est manifestement entier. Le fait que M est un multiplicateur complexe, pour τ, résulte, d'après les équations (2), de ce que l'on a

$$M = \frac{b - \varepsilon}{2} + c\tau, \qquad M\tau = -a - \frac{b + \varepsilon}{2}\tau,$$

ainsi qu'il est aisé de le vérifier. D'ailleurs, de ce que M est un multiplicateur pour τ et de l'expression de μ au moyen de M, il résulte que μ est, comme on le sait déjà, un multiplicateur pour τ.

725. Si τ_1 est lié à τ par une substitution linéaire $\tau_1 = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}$, à déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$ égal à 1, il existera une multiplication

complexe pour τ_1 avec le même multiplicateur M; car τ_1 vérifiera évidemment une équation du second degré

$$a_1 + b_1\tau_1 + c_1\tau_1^2 = 0,$$

où $4a_1c_1 - b_1^2$ est égal au produit de $4ac - b^2$ par le carré du déterminant de substitution qui est 1, en sorte que b et b_1 sont de la même parité et que les quantités m_1, ε_1, analogues à m, ε, sont respectivement égales à ces dernières. Rappelons d'ailleurs que l'on a

$$\mathrm{J}(\tau) = \mathrm{J}(\tau_1).$$

726. Supposons toujours qu'il y ait multiplication complexe pour τ. Des équations (2) il résulte que l'on a

$$\tau = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau},$$

d'où

$$\mathrm{J}(\tau) = \mathrm{J}\left(\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}\right).$$

D'autre part, quel que soit τ, les valeurs x que prend la fonction $\mathrm{J}\left(\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}\right)$ quand α, β, γ, δ prennent toutes les valeurs entières possibles telles que l'on ait $\alpha\delta - \beta\gamma = n$, n étant un nombre entier positif donné, vérifient une équation algébrique

$$\mathrm{F}(x, \mathrm{J}) = 0,$$

où l'on a écrit J au lieu de $\mathrm{J}(\tau)$; puisqu'il y a multiplication complexe, J vérifiera donc l'équation $\mathrm{F}(\mathrm{J}, \mathrm{J}) = 0$. Ainsi chaque invariant absolu qui correspond à une valeur de τ pour laquelle il y a multiplication complexe, vérifie une équation algébrique à coefficients entiers (1).

Kronecker a appelé ces invariants absolus particuliers : les *invariants singuliers*. Il a de même appelé *modules singuliers* les valeurs de $k^2(\tau)$, qui correspondent aux valeurs de τ pour lesquelles il y a multiplication complexe.

---

(1) On démontre d'ailleurs que c'est un nombre algébrique *entier*.

727. La théorie de la multiplication complexe est liée à l'Arithmétique. On sait que deux formes quadratiques définies, à coefficients entiers,

$$f = ax^2 + bxy + cy^2, \qquad f' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2,$$

sont dites (proprement) *équivalentes* quand on peut passer de l'une à l'autre par une substitution à coefficients entiers

$$x' = \alpha x + \beta y, \qquad y' = \gamma x + \delta y,$$

dont le déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$ est égal à 1. On a alors

$$(3) \qquad \begin{cases} a = a'\alpha^2 + b'\alpha\gamma + c'\gamma^2, \\ b = 2a'\alpha\beta + b'(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c'\gamma\delta, \\ c = a'\beta^2 + b'\beta\delta + c'\delta^2, \end{cases}$$

et $b'^2 - 4a'c'$ est égal à $b^2 - 4ac$. Aux formes précédentes sont liées naturellement les équations

$$a + b\tau + c\tau^2 = 0, \qquad a' + b'\tau' + c'\tau'^2 = 0.$$

Si l'on désigne par τ, τ' les racines de ces équations pour lesquelles le coefficient de i est positif, si l'on pose, comme précédemment,

$$2\mathrm{M} = -\varepsilon + i\sqrt{4ac - b^2}, \qquad 2\mathrm{M}' = -\varepsilon' + i\sqrt{4a'c' - b'^2},$$

en désignant toujours par ε, ε' des quantités égales à 0 ou à 1 et de même parité que b, b', on voit que, quand les deux formes f et f' sont équivalentes, M est égal à M'. En supposant toujours l'équivalence des deux formes, on peut passer de τ à τ' par une substitution linéaire (de déterminant égal à 1), en sorte que $\mathrm{J}(\tau)$ est égal à $\mathrm{J}(\tau')$.

Inversement, s'il y a multiplication complexe pour τ et τ', et si l'on a $\mathrm{J}(\tau) = \mathrm{J}(\tau')$, d'une part τ et τ' vérifient des équations de la forme

$$a + b\tau + c\tau^2 = 0, \qquad a' + b'\tau + c'\tau^2 = 0,$$

où l'on peut supposer que les nombres entiers a, b, c sont sans diviseur commun, de même que a', b', c' et que c et c' sont positifs; d'autre part, à cause de $\mathrm{J}(\tau) = \mathrm{J}(\tau')$, il existera des entiers α,

β, γ, δ tels que l'on ait

$$\tau' = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1;$$

il en résulte que l'équation

$$a'(\alpha + \beta\tau)^2 + b'(\alpha + \beta\tau)(\gamma + \delta\tau) + c'(\gamma + \delta\tau)^2 = 0$$

a les mêmes racines que l'équation

$$a + b\tau + c\tau^2 = 0.$$

Il est bien aisé d'en conclure que, si l'on suppose

$$b^2 - 4ac = b'^2 - 4a'c',$$

les deux premiers membres sont identiques, d'où résultent immédiatement les équations (3) et, par suite, l'équivalence des deux formes envisagées. On voit d'ailleurs aussi que $M = M'$.

Il suit de là que l'égalité $J(\tau) = J(\tau')$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux formes

$$ax^2 + bxy + cy^2, \qquad a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2$$

soient équivalentes. Si l'on range dans une même classe les formes équivalentes, on voit que la recherche du nombre de classes pour un déterminant $b^2 - 4ac < 0$ donné revient à la recherche du degré de l'équation $F(J, J) = 0$.

§ IX. — Décomposition d'un nombre entier en une somme de quatre carrés.

728. La comparaison des différents développements en série d'une même quantité, que fournit la théorie des fonctions elliptiques, conduit souvent à des propositions intéressantes d'Arithmétique.

Signalons, d'après Jacobi (¹), le théorème sur la décomposition en carrés. Il va résulter de l'identification des deux développe-

(¹) *Œuvres complètes*, t. I, p. 239 (fin des *Fundamenta*) et p. 247.

ments (XXXVI$_{1,4}$) et (CX$_1$)

$$e_1 - e_3 = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2}\right)^4,$$

$$e_1 - e_3 = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\left(1 + 8\sum_{(\nu)} \frac{2\nu q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}} + 8\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1+q^n}\right),$$

où $\nu = 1, 3, 5, 7, \ldots$. Considérons d'abord le premier de ces deux développements.

On reconnaît de suite, à cause de l'identité

$$\sum_n q^{n^2} \sum_{n'} q^{n'^2} = \sum_{n,n'} q^{n^2+n'^2},$$

que, si l'on ordonne le carré de $\sum_n q^{n^2}$ suivant les puissances entières de q, le coefficient de q^N sera le nombre de solutions de l'équation

$$n^2 + n'^2 = N;$$

de même, dans le cube et la quatrième puissance de $\sum_n q^{n^2}$, le coefficient de q^N sera le nombre de solutions de l'équation

$$n^2 + n'^2 + n''^2 = N$$

ou de l'équation

$$n^2 + n'^2 + n''^2 + n'''^2 = N.$$

Cherchons maintenant le coefficient de q^N dans les deux séries

$$\sum_\nu \frac{2\nu q^2}{1-q^{2\nu}} = \sum\sum 2\nu q^{2\nu(\alpha+1)},$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1+q^n} = \sum\sum (-1)^\beta n q^{n(\beta+1)}.$$

Soit

$$N = 2^r p,$$

p étant un nombre entier positif impair, et considérons le cas où r est plus grand que zéro. Pour que $2\nu(\alpha+1)$ soit égal à $2^r p$, il faut et il suffit que ν soit un diviseur de p; à chacun de ces diviseurs correspond un terme en q^N dans le premier développe-

ment; le coefficient de q^N dans ce premier développement sera donc $\psi(p)$, en désignant par $\psi(p)$ la somme des diviseurs de p.

Si l'on a

$$n(\beta+1) = 2^r p,$$

n devra avoir la forme $2^\rho d$, d étant un diviseur de p qui peut d'ailleurs être égal à 1 ou à p, et ρ un entier qui peut être nul, inférieur ou égal à r. Inversement, si n est de cette forme, en supposant $dd' = p$, il y aura un nombre

$$\beta = -1 + 2^{r-\rho} d',$$

qui rendra $n(\beta+1)$ égal à $2^r p$.

Si ρ est inférieur à r, β est impair; le terme du second développement qui correspond aux nombres d et ρ est ainsi $-2^\rho d$; la somme de ces termes qui correspondent à une même valeur de d est

$$-d \sum_{\rho=0}^{\rho=r-1} 2^\rho = -d(2^r - 1),$$

et la somme de tous ces termes qui correspondent à une même valeur de p est donc

$$-\psi(p)(2^r - 1).$$

Si ρ est égal à r, β est pair; le terme du second développement qui correspond aux deux nombres d et $\rho = r$ est $2^r d$; la somme de ceux de ces termes qui correspondent à une même valeur de p est $2^r \psi(r)$.

Finalement, le coefficient de q^N, dans la somme

$$\sum_{(\nu)} \frac{2\nu q^{2\nu}}{1 - q^{2\nu}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n q^n}{1 + q^n},$$

est

$$2\psi(p) - \psi(p)(2^r - 1) + \psi(p) 2^r = 3\psi(p),$$

en supposant $r > 0$. Pour $r = 0$, on voit de même que ce coefficient est $\psi(p)$.

On voit donc que le nombre de solutions distinctes, en nombres entiers positifs nuls ou négatifs, de l'équation

$$n^2 + n'^2 + n''^2 + n'''^2 = 2^r p$$

est $24\psi(p)$ ou $8\psi(p)$, suivant que r est différent de zéro ou égal à zéro. Il faut entendre que les solutions n, n', n'', n''' et n_1, n'_1, n''_1, n'''_1 sont distinctes si l'on n'a pas à la fois $n = n_1$, $n' = n'_1$, $n'' = n''_1$, $n''' = n'''_1$.

Non seulement on a ainsi démontré la possibilité de décomposer en quatre carrés un nombre entier quelconque, mais on a le nombre de ces décompositions.

L'identité (XXXVI_6)

$$\mathfrak{I}_3^4(0) = \mathfrak{I}_2^4(0) + \mathfrak{I}_4^4(0),$$

traitée d'une façon analogue, conduit à la proposition suivante :

Le nombre des décompositions en quatre carrés quelconques d'un entier impair est égal à huit fois le nombre des décompositions du quadruple de cet entier en une somme de quatre carrés dont les racines sont des nombres tous impairs et positifs [1].

---

[1] *Voir* le *Cours* de Ch. Hermite, rédigé par M. Andoyer, 4e éd., p. 241.

NOTE I.

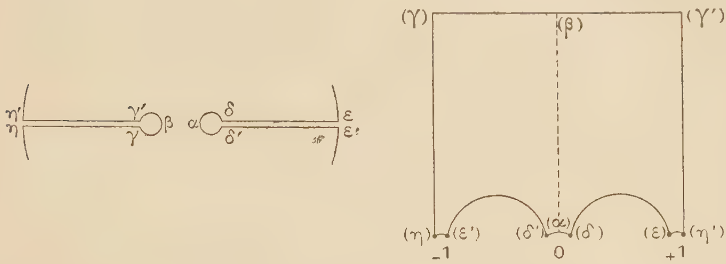
Sur la fonction de x définie par l'égalité $\tau = i\frac{X'(x)}{X(x)}$ et sur un théorème de M. Picard.

On a expliqué au Chapitre VII comment τ est une fonction univoque de x dans le plan $\mathfrak{E}$ obtenu en pratiquant dans le plan de la variable x deux coupures allant le long de l'axe des quantités réelles, l'une de 0 à $-\infty$, l'autre de 1 à $+\infty$. En dehors des coupures la définition de τ n'offre aucune difficulté; nous avons expliqué au n° 545 comment, au moyen des formules (CXX), on pouvait compléter cette définition sur le bord supérieur de la coupure de droite et sur le bord inférieur de la coupure de gauche; rien n'empêche, en *distinguant les deux bords* de chaque coupure, d'adopter une définition semblable sur le bord inférieur de la coupure de droite et sur le bord supérieur de la coupure de gauche; la fonction $\frac{iX'(x)}{X(x)}$ est alors définie dans tout le plan $\mathfrak{E}$, y compris les bords des coupures, sur lesquels la fonction prend des valeurs infiniment voisines de celles qu'elle prend en un point infiniment voisin de la région du plan à laquelle appartient le bord considéré et ces valeurs sont fournies sans ambiguïté aucune par les formules (CXX_4). C'est seulement aux points 0, 1 que la fonction n'est pas définie. Nous représenterons les bords de ces coupures par des parallèles infiniment voisines $\delta\varepsilon$, $\delta'\varepsilon'$, $\gamma'\eta'$, $\gamma\eta$ en regardant $\delta\varepsilon$, $\gamma'\eta'$ comme appartenant à la région supérieure du plan, $\delta'\varepsilon'$, $\gamma\eta$ comme appartenant à la région inférieure; nous relierons ces coupures par des cercles infiniment petits $\delta\alpha\delta'$, $\gamma\beta\gamma'$ décrits respectivement des points 1 et 0 comme centres (les points α, β sont supposés sur l'axe des quantités réelles); enfin, nous décrirons, du point 0 comme centre, un cercle de rayon infiniment grand qui rencontre les coupures aux points ε, ε', η, η' infiniment éloignés. Il est clair que le contour $\alpha\delta\varepsilon\eta'\gamma'\beta\gamma\eta\varepsilon'\delta'\alpha$ limite une région (S) simplement connexe dans le plan $\mathfrak{E}$. Notre but est de montrer comment se fait dans le plan de la variable τ, lié à x par la formule

$$\tau = i\frac{X'(x)}{X(x)} = f(x),$$

l'image du contour de (S) parcouru dans le sens direct. Les formules (CXX) y suffisent entièrement. Nous représenterons systématiquement par (a) le point du plan des τ qui correspond au point a du plan des $\varkappa$.

L'image cherchée est figurée schématiquement ci-dessous :



Les points (α) et (β) sont sur l'axe des quantités purement imaginaires, le premier très près de o, le second très haut. L'aire à droite de la ligne ponctuée est l'image de l'aire de (S) qui est au-dessus de l'axe des quantités réelles, l'aire à gauche est l'image de l'aire de (S) qui est au-dessous de l'axe des quantités réelles : deux points $\varkappa$ d'affixes conjuguées ont pour images des points $(\varkappa)$ symétriques par rapport à l'axe des quantités purement imaginaires.

Il nous faut justifier les diverses parties de cette figure. Supposons d'abord que $\varkappa$ décrive le petit cercle $\gamma'\beta\gamma$; les formules (CXX_{2-3}) montrent de suite que, $\varkappa$ étant très petit en valeur absolue, on a

$$\tau = \frac{i\mathrm{X}'(\varkappa)}{\mathrm{X}(\varkappa)} = \frac{i\left[\frac{2}{\pi}\log 2 \log(1-\varkappa) + \eta(\varkappa)\frac{4}{\pi}\right]}{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\log(1-\varkappa) - \varepsilon(\varkappa)\frac{\pi}{2}} - \frac{i}{\pi}\log\frac{\varkappa}{16},$$

en sorte que $\varkappa$ est sensiblement $-\frac{i}{\pi}\log\varkappa$, le logarithme ayant sa détermination principale. Si l'on pose pour un instant $\varkappa = \rho e^{i\theta}$, on aura

$$-\frac{i}{\pi}\log\varkappa = \frac{\theta}{\pi} - \frac{i\log\rho}{\pi};$$

$\varkappa$ décrivant le petit cercle $\gamma'\beta\gamma$, $\frac{\theta}{\pi}$ diminue en partant d'une valeur un peu inférieure à 1 pour aboutir à une valeur un peu supérieure à -1; le point τ ou $(\varkappa)$ décrit donc, approximativement, le segment de droite parallèle à l'axe des quantités réelles, qui va du point (γ') ou $\frac{-i\log\rho}{\pi} + 1$ au point (γ) ou $\frac{-i\log\rho}{\pi} - 1$.

La figure décrite par le point τ quand x décrit le petit cercle $\delta'\alpha\delta$ se déduit de la précédente par la formule $f(x) = \frac{-1}{f(1-x)}$. Le point $1-x$ décrit alors, en effet, le cercle $\gamma'\beta\gamma$, donc $f(1-x)$ décrit approximativement le segment rectiligne qui va de (γ') à (γ); $f(x)$ décrit donc approximativement un arc de cercle de centre 0 allant de (δ') à (δ), arc de cercle correspondant évidemment à un angle au centre infiniment petit.

Si x décrit le bord supérieur $\delta\varepsilon$ de la coupure de droite, on peut regarder x comme prenant des valeurs réelles de 1 à $+\infty$; $\frac{1}{x}$ varie alors de 1 à 0, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ s'élève donc sur l'axe des quantités purement imaginaires d'un point très voisin de 0 à un point très éloigné; de la formule $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{1-f(x)}$ on déduit, par suite, que le point $f(x)$ décrit dans la région supérieure du plan, le demi-cercle qui a pour diamètre le segment qui va du point 0 au point 1, ou plutôt du point (δ) au point (ε), puisque x ne va que de δ à ε.

Quand le point x décrit la coupure $\delta'\varepsilon'$ symétrique de $\delta\varepsilon$ par rapport à l'axe des quantités réelles, le point $f(x)$ décrit le demi-cercle symétrique du précédent par rapport à l'axe des quantités purement imaginaires. Quand x décrit le demi-grand cercle $\varepsilon\eta'$ dans la région supérieure du plan, $\frac{1}{x}$ décrit le demi-petit cercle $\beta\gamma$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ décrit approximativement le segment rectiligne qui va de (β) à (γ); donc, enfin,

$$\tau = f(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{1+f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

décrit un arc de cercle infiniment petit de (ε) à (η') dans le voisinage de 1.

Quand le point x décrit le bord supérieur $\eta'\gamma'$ de la coupure de gauche, en allant de $-\infty$ à 0, le point $1-x$ décrit le bord inférieur $\varepsilon'\delta'$ de la coupure de droite de $+\infty$ à 1, $-\frac{1}{f(x)}$ décrit donc le demi-cercle $(\varepsilon')(\delta')$ et $\tau = f(x)$, la parallèle menée du point 1 à l'axe des quantités purement imaginaires à partir de (η') infiniment voisin de (ε) et de 1, jusqu'à un point (γ') infiniment éloigné au-dessus de l'axe des quantités réelles.

En réunissant toutes ces parties, on a l'image complète. L'aire (S) et son image se correspondent, point par point, d'une façon univoque.

On peut si l'on veut supprimer les arcs infiniment petits ainsi que le côté $(\gamma')(\gamma)$ infiniment éloigné vers le haut ; on a alors le théorème suivant :

Si dans le plan des $\varkappa$ on pratique deux coupures allant de 1 à $+\infty$ et de 0 à $-\infty$ le long de l'axe des quantités réelles, et si l'on regarde le bord supérieur ou inférieur de chaque coupure comme faisant partie de la région supérieure ou inférieure, le plan des $\varkappa$ ainsi coupé, par la transformation conforme $\tau = \dfrac{iX'(\varkappa)}{X(\varkappa)}$, a pour image la partie du plan des τ limitée : 1° en bas par les demi-cercles situés au-dessus de l'axe des quantités réelles, et ayant pour diamètres les segments de droite allant de -1 à 0 et de 0 à $+1$, 2° à droite et à gauche par les parallèles menées par les points $+1$ et -1 à l'axe des quantités purement imaginaires. Les deux demi-cercles sont les images des bords inférieur et supérieur de la coupure de droite ; les deux parallèles sont les images des bords supérieur et inférieur de la coupure de gauche.

Quand on traverse la coupure de gauche et qu'on remplace $X'(\varkappa)$, $X(\varkappa)$ par les fonctions qui les continuent, la fonction qui continue τ est, comme on l'a vu (t. III, p. 209), $\tau \pm 2$ suivant que l'on traverse la coupure de haut en bas ou de bas en haut. De même quand on traverse la coupure de droite, la fonction qui continue τ est $\dfrac{\tau}{1 \mp 2\tau}$, suivant que l'on traverse la coupure de bas en haut ou de haut en bas. On reconnaît très aisément quelles images du plan des $\varkappa$, coupé comme on l'a expliqué, fournissent les transformations conformes correspondant à ces nouvelles branches de la fonction $\dfrac{iX'(\varkappa)}{X(\varkappa)}$.

Si nous envisageons la fonction $\tau = f(\varkappa)$, définie en un point $\varkappa_0$ non situé sur les coupures, ainsi qu'aux environs de $\varkappa_0$, et obtenue par continuation le long d'une courbe quelconque, pouvant traverser les coupures, mais non les points 0 ou 1, nous savons que cette fonction est holomorphe à l'intérieur de tout contour simple entourant le point $\varkappa_0$ et ne contenant ni le point 0, ni le point 1. Dans une aire contenant l'un ou l'autre de ces points singuliers, la fonction $f(\varkappa)$ est susceptible d'une infinité de déterminations, mais toutes les branches de cette fonction que l'on engendre en tournant autour de l'un ou de l'autre des points *singuliers* 0, 1 sont toujours régulières en un point quelconque du plan autre que 0 et 1. En outre, le coefficient de i, pour une valeur quelconque de $f(\varkappa)$, est toujours positif.

Ces propriétés de la fonction $f(\varkappa)$ ont permis à M. E. Picard

d'établir une proposition importante concernant les fonctions entières (transcendantes ou non) et que voici [1] :

S'il existe deux nombres a, b, tels que la fonction entière $g(z)$ ne puisse acquérir, pour aucune valeur finie de z, ni la valeur a, ni la valeur b, cette fonction est une constante.

Si la fonction entière $g(z)$ ne prend ni la valeur a, ni la valeur b, la fonction, aussi entière, $\dfrac{g(z)-a}{b-a}$ ne prendra ni la valeur 0 ni la valeur 1. Il suffira donc de démontrer qu'une fonction entière $g(z)$ qui ne prend ni la valeur 0, ni la valeur 1, est une constante.

Dans la fonction $\tau = f(\varkappa)$ précédemment définie, regardons $\varkappa$ comme étant égal à $g(z)$; nous obtenons ainsi une fonction de z que nous désignerons par $F(z)$ et qui (n° 49) est régulière pour toute valeur z_0 de z, puisque $\varkappa$ n'est jamais égal ni à 0, ni à 1. La série entière en $z - z_0$ qui représente la fonction $F(z)$ aux environs de z_0 ne peut avoir un rayon de convergence fini (n° 55); la fonction $F(z)$ peut donc être représentée par une série entière en $z - z_0$ (ou en z), convergente quel que soit z; c'est une fonction entière.

Si, d'ailleurs, on pose $F(z) = A + iB$, A et B étant réels, on est sûr que B est positif, quel que soit z; or on a

$$|e^{iF(z)}| = e^{-B} < 1;$$

la valeur absolue de la fonction entière $e^{iF(z)}$ étant plus petite que 1, quel que soit z, cette fonction est une constante; il en est donc de même de $F(z)$, et, par suite, de $g(z)$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

(1) *Annales de l'École Normale supérieure,* 1880. Cette proposition, généralisée tout d'abord par l'auteur lui-même, a reçu, grâce aux beaux travaux de M. Borel (*Leçons sur les fonctions entières,* 1900), une extension considérable. Nous n'avons en vue que la démonstration même de M. Picard, relative au théorème énoncé.

NOTE 2.

Sur les suites arithmético-géométriques de Gauss.

En partant de deux nombres positifs quelconques a_0, b_0, dont le premier a_0 sera supposé plus grand que le second b_0, considérons la double suite indéfinie

$$\begin{array}{llllllll} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & a_{n-1}, & a_n, & \ldots, \\ b_0, & b_1, & b_2, & \ldots, & b_{n-1}, & b_n, & \ldots, \end{array}$$

obtenue en supposant, en général,

$$(1) \qquad a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \qquad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

où l'on doit entendre, comme dans ce qui suit, que le radical a sa détermination arithmétique.

On voit de suite que l'on a

$$a_n - b_n = \frac{\left[\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}}\right]^2}{2}, \qquad a_n + b_n = \frac{\left[\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}}\right]^2}{2},$$

$$(2) \qquad \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} = \left(\frac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}}}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}}}\right)^2 < \left(\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}\right)^2,$$

la dernière inégalité résultant de ce que l'on a

$$(\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}})^4 > (a_{n-1} + b_{n-1})^2.$$

Les formules précédentes montrent que l'on a

$$a_n > b_n, \qquad a_n < a_{n-1}, \qquad b_n > b_{n-1};$$

les nombres a_0, a_1, a_2, ... vont donc en décroissant; les nombres b_0, b_1, b_2, ... vont en croissant; les nombres b_0, b_1, b_2, ... restent inférieurs aux nombres a_0, a_1, a_2, ... de même indice; les deux suites ont donc une limite; cette limite est la même à cause de l'inégalité

$$(3) \qquad \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} < \left(\frac{a_0 - b_0}{a_0 + b_0}\right)^{2^n}$$

qui résulte immédiatement de l'inégalité (2). On voit sur l'inéga-

lité (3) que les deux suites convergent très rapidement vers leur limite commune.

Si l'on pose

$$c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

il est clair que l'on aura

$$\lim_{n=\infty} c_n = 0;$$

au reste, on reconnaît sans peine que l'on a

$$c_n < 4b_0 \left(\frac{c_1}{4b_0}\right)^{2^{n-1}}.$$

Gauss a appelé la limite commune des deux suites $a_0, a_1, \ldots$ et $b_0, b_1, \ldots$ la *moyenne arithmético-géométrique* des deux nombres positifs donnés a_0, b_0, et l'a représentée [1] par le symbole μ. On a manifestement, quel que soit le nombre positif h,

$$\mu(ha_0, hb_0) = h\mu(a_0 b_0).$$

Proposons-nous d'évaluer la moyenne arithmético-géométrique des deux nombres positifs

$$a_0 = \mathfrak{S}_3^2(0 \mid \tau), \qquad b_0 = \mathfrak{S}_4^2(0 \mid \tau),$$

où $\frac{\tau}{i}$ est un nombre donné réel et positif, en sorte que $q = e^{\tau\pi i}$ est réel, positif et plus petit que 1, et que $a_0 > b_0 > 0$. On a immédiatement (XXXVI_6)

$$c_0 = \mathfrak{S}_2^2(0 \mid \tau),$$

puis (XLVII_4),

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{S}_3^2(0 \mid \tau) + \mathfrak{S}_4^2(0 \mid \tau)\right] = \mathfrak{S}_3^2(0 \mid 2\tau),$$

$$b_1 = \sqrt{a_0 b_0} = \mathfrak{S}_3(0 \mid \tau)\,\mathfrak{S}_4(0 \mid \tau) = \mathfrak{S}_4^2(0 \mid 2\tau),$$

$$c_1 = \frac{a_0 - b_0}{2} = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{S}_3^2(0 \mid \tau) - \mathfrak{S}_4^2(0 \mid \tau)\right] = \mathfrak{S}_2^2(0 \mid 2\tau),$$

et, en répétant le même raisonnement,

$$a_n = \mathfrak{S}_3^2(0 \mid 2^n\tau), \qquad b_n = \mathfrak{S}_4^2(0 \mid 2^n\tau), \qquad c_n = \mathfrak{S}_2^2(0 \mid 2^n\tau).$$

---

(1) *Werke*, t. III, p. 352; *voir* aussi t. III, p. 362 et suivantes (*Nachlass*), où Gauss emploie le symbole M au lieu de μ.

Quand n croît indéfiniment, $e^{2^n\tau\pi i} = q^{2^n}$ tend vers zéro, donc a_n et b_n tendent vers 1 ; nous aurons donc

$$\mu[\mathfrak{S}_3^2(0\,|\,\tau),\ \mathfrak{S}_4^2(0\,|\,\tau)] = 1.$$

Le changement de τ en $-\frac{1}{\tau}$, dans cette formule, donne ($\text{XLIII}_{14,16}$)

$$\mu\left[\frac{\tau}{i}\,\mathfrak{S}_3^2(0\,|\,\tau),\ \frac{\tau}{i}\,\mathfrak{S}_2^2(0\,|\,\tau)\right] = 1,$$

et, par suite,

$$\mu\,[\mathfrak{S}_3^2(0\,|\,\tau),\ \mathfrak{S}_2^2(0\,|\,\tau)] = \frac{i}{\tau} = \frac{1}{\frac{\tau}{i}}.$$

Ceci posé, appliquons les formules de transformation quadratique de Gauss, en nous rappelant que λ y désigne le module correspondant à une valeur de τ égale à la *moitié* de celle qui correspond au module k, et que l'on peut donc poser simultanément (XXXVII_{1-2}) dans les formules (LXXXIV), en y changeant, toutefois, τ en 2τ,

$$\lambda = \frac{\mathfrak{S}_2^2(0\,|\,\tau)}{\mathfrak{S}_3^2(0\,|\,\tau)} = \frac{c_0}{a_0}, \qquad \lambda' = \frac{b_0}{a_0} = \frac{\mathfrak{S}_4^2(0\,|\,\tau)}{\mathfrak{S}_3^2(0\,|\,\tau)},$$

$$k = \frac{\mathfrak{S}_2^2(0\,|\,2\tau)}{\mathfrak{S}_3^2(0\,|\,2\tau)} = \frac{c_1}{a_1}, \qquad k' = \frac{b_1}{a_1} = \frac{\mathfrak{S}_4^2(0\,|\,2\tau)}{\mathfrak{S}_3^2(0\,|\,2\tau)}.$$

Si l'on désigne par ψ_0 et φ_0 les fonctions *amplitudes*, comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, de u et de $\frac{u}{1+k}$, pour les modules λ et k, en sorte que l'on ait

$$\operatorname{sn}(u, \lambda) = \sin\psi_0, \qquad \operatorname{sn}\left(\frac{u}{1+k}, k\right) = \sin\varphi_0,$$

la formule (LXXXIV_1) fournit la relation

$$\sin\psi_0 = (a_1 + c_1)\,\frac{\sin\varphi_0}{a_1 + c_1\sin^2\varphi_0},$$

que l'on peut écrire, puisque $\frac{c_1}{a_1}$ est égal à $\frac{a_0 - b_0}{a_0 + b_0}$,

(1) $$\sin\psi_0 = \frac{2a_0\sin\varphi_0}{(a_0 + b_0)\cos^2\varphi_0 + 2a_0\sin^2\varphi_0};$$

c'est sous cette forme que Gauss en a fait usage [1].

---

[1] *Werke*, t. III, p. 352.

Des relations

$$\psi_0 = am(u, \lambda), \qquad \varphi_0 = am\left(\frac{a}{1+k}, k\right)$$

on déduit, d'ailleurs, par inversion,

$$u = \int_0^{\psi_0} \frac{dt}{\left|\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 t}\right|}, \qquad \frac{u}{1+k} = \int_0^{\varphi_0} \frac{dt}{\left|\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}\right|},$$

en sorte que l'équation (1) est équivalente à celle-ci

$$(1\ bis) \qquad \int_0^{\psi_0} \frac{dt}{\left|\sqrt{a_0^2 \cos^2 t + b_0^2 \sin^2 t}\right|} = \int_0^{\varphi_0} \frac{dt}{\left|\sqrt{a_1^2 \cos^2 t + b_1^2 \sin^2 t}\right|}.$$

De même, les deux relations

$$(2) \qquad \sin\psi_n = \frac{2a_n \sin\varphi_n}{(a_n + b_n)\cos^2\varphi_n + 2a_n \sin^2\varphi_n}, \qquad 0 \leqq \varphi_n \leqq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqq \psi_n \leqq \frac{\pi}{2}$$

et

$$(2\ bis) \qquad \int_0^{\psi_n} \frac{dt}{\left|\sqrt{a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t}\right|} = \int_0^{\varphi_n} \frac{dt}{\left|\sqrt{a_{n+1}^2 \cos^2 t + b_{n+1}^2 \sin^2 t}\right|}$$

sont équivalentes quel que soit $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Ces formules permettent de ramener le calcul d'une intégrale elliptique quelconque de première espèce, mise sous la forme normale de Legendre, et dont le module est réel et compris entre 0 et 1, au calcul d'une intégrale du même type ayant un module positif plus petit qu'un nombre positif aussi petit que l'on veut. Si, en effet,

$$\int_0^{\psi_0} \frac{dt}{\left|\sqrt{a_0^2 \cos^2 t + b_0^2 \sin^2 t}\right|}$$

est l'intégrale donnée, à module $\frac{c_0}{a_0}$, la formule (1 *bis*) montre qu'elle est égale à l'intégrale

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{dt}{\left|\sqrt{a_1^2 \cos^2 t + b_1^2 \sin^2 t}\right|}$$

à module $\frac{c_1}{a_1}$ moindre que $\frac{c_0}{a_0}$, et où φ_0 s'exprime au moyen de ψ_0 par la formule (1). En prenant ensuite $\psi_1 = \varphi_0$ dans la formule (2 *bis*) écrite pour $n = 2$, on voit de même que l'intégrale donnée est égale

à l'intégrale

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{dt}{\left|\sqrt{a_2^2 \cos^2 t + b_2^2 \sin^2 t}\right|}$$

à module $\frac{c_2}{a_2}$ moindre que $\frac{c_1}{a_1}$, et où φ_1 s'exprime au moyen de $\psi_1 = \varphi_0$ par la formule (2) écrite pour $n = 1$. Et ainsi de proche en proche, en appliquant les formules (2) successivement pour $n = 2, 3, \ldots$, et en prenant chaque fois $\psi_i = \varphi_{i-1}$, on voit que l'on a pour tout indice n,

$$\int_0^{\psi_0} \frac{dt}{\left|\sqrt{a_0^2 \cos^2 t + b_0^2 \sin^2 t}\right|} = \int_0^{\varphi_n} \frac{dt}{\left|\sqrt{a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t}\right|},$$

φ_n s'exprimant au moyen de ψ_0 par la chaîne d'équations du second degré (en $\sin\varphi_i$)

$$\sin\psi_i = \frac{2a_i \sin\varphi_i}{(a_i + b_i)\cos^2\varphi_i + 2a_i \sin^2\varphi_i}; \qquad \varphi_i = \psi_{i+1};$$

$$0 \leq \varphi_i \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq \psi_i \leq \frac{\pi}{2} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Or, par un choix convenable de n, on peut toujours s'arranger de façon que le module positif $\frac{c_n}{a_n}$ de la dernière intégrale soit plus petit qu'un nombre positif donné à l'avance aussi petit que l'on veut. Le théorème annoncé est donc démontré.

En particulier, si l'on a à calculer pour un module quelconque donné, compris entre 0 et 1, la valeur de l'intégrale *complète* de première espèce de Legendre

$$\frac{1}{a_0} K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\left|\sqrt{a_0^2 \cos^2 t + b_0^2 \sin^2 t}\right|},$$

on voit que ce calcul revient à celui de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\left|\sqrt{a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t}\right|}$$

qui lui est égale, quel que soit le choix que l'on fasse de l'indice n, et pour laquelle le module peut être rendu aussi petit que l'on veut.

NOTE 3.

Sur les covariants H et T d'une forme biquadratique R.

Toute forme binaire biquadratique

$$R = a_0 z_1^4 + 4 a_1 z_1^3 z_2 + 6 a_2 z_1^2 z_2^2 + 4 a_3 z_1 z_2^3 + a_4 z_2^4$$

admet, outre son hessien (t. IV, p. 70)

$$H = A_0 z_1^4 + 4 A_1 z_1^3 z_2 + 6 A_2 z_1^2 z_2^2 + 6 A_3 z_1 z_2^3 + A_4 z_2^4,$$

un second covariant T que l'on peut définir par l'une ou l'autre des égalités [1] équivalentes

$$\begin{aligned} T = \frac{2}{z_2}[& R(A_0 z_1^3 + 3 A_1 z_1^2 z_2 + 3 A_2 z_1 z_2^2 + A_3 z_2^3) \\ & - H(a_0 z_1^3 + 3 a_1 z_1^2 z_2 + 3 a_2 z_1 z_2^2 + a_3 z_2^3)], \\ T = -\frac{2}{z_1}[& R(A_1 z_1^3 + 3 A_2 z_1^2 z_2 + 3 A_3 z_1 z_2^2 + A_4 z_2^3) \\ & - H(a_1 z_1^3 + 3 a_2 z_1^2 z_2 + 3 a_3 z_1 z_2^2 + a_4 z_2^3)]. \end{aligned}$$

De la relation $p(2u - a - b) = \frac{-H[f(u)]}{R[f(u)]}$ établie (p. 74 du t. IV), on déduit aisément une relation fondamentale qui lie les deux covariants H et T aux deux invariants g_2, g_3 et à la forme R elle-même.

Reprenons les notations

$$z = \frac{z_1}{z_2} = f(u), \qquad y = p(2u - a - b);$$

on aura, d'une part, comme on vient de le rappeler,

$$y = -\frac{H(z_1, z_2)}{R(z_1, z_2)}; \tag{1}$$

---

[1] La différence des seconds membres, multipliée par $\frac{1}{2} z_1 z_2$ se présente sous la forme RH — HR et est donc nulle. Il peut être bon d'observer que l'on a aussi

$$T = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial R}{\partial z_1}\frac{\partial H}{\partial z_2} - \frac{\partial H}{\partial z_1}\frac{\partial R}{\partial z_2}\right).$$

d'autre part, on a

$$\frac{dy}{-\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}} = d(2u-a-b) = d(2u),$$

et comme la relation $\dfrac{dz}{\sqrt{R(z)}} = du$ peut s'écrire

$$\frac{z_2\,dz_1 - z_1\,dz_2}{\sqrt{R(z_1, z_2)}} = du,$$

on a aussi la relation

$$(2) \qquad 2\frac{z_2\,dz_1 - z_1\,dz_2}{\sqrt{R(z_1, z_2)}} = \frac{dy}{-\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}}.$$

Si dans la relation (2) on remplace y par sa valeur tirée de (1), on obtient l'égalité

$$2\frac{z_2\,dz_1 - z_1\,dz_2}{\sqrt{R(z_1, z_2)}} = \frac{R\,dH - H\,dR}{\sqrt{R(-4H^3+g_2HR^2-g_3R^3)}};$$

mais $R\,dH - H\,dR$ est une fonction linéaire et homogène de dz_1, dz_2 dont il est aisé de calculer les coefficients; le coefficient de dz_1 est $2z_2T$, celui de dz_2 est $-2z_1T$; on a donc

$$\frac{z_2\,dz_1 - z_1\,dz_2}{\sqrt{R(z_1, z_2)}} = \frac{(z_2\,dz_1 - z_1\,dz_2)T}{\sqrt{R(-4H^3+g_2HR^2-g_3R^3)}}.$$

On en déduit la relation fondamentale [1], due à M. Hermite,

$$T^2 = -4H^3 + g_2HR^2 - g_3R^3.$$

---

[1] M. WEBER, *Ellipt. Functionen*, p. 13, part inversement de cette relation pour établir l'égalité (1).

NOTE 4.

Sur une transformation du second ordre qui relie les deux cas où les invariants sont réels.

Nous avons signalé, au n° 612, la transformation qui permet de passer d'une fonction $y = p(u \mid \omega_1, \omega_3)$ dans laquelle les deux périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$ sont imaginaires conjuguées à la fonction

$$Y = p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_3 + \omega_1}{2}, \frac{\omega_3 - \omega_1}{2}\right)$$

dans laquelle les deux périodes sont, l'une réelle, l'autre purement imaginaire. Il convient d'étudier d'un peu plus près cette transformation, en raison du parti qu'on en peut tirer dans les applications.

Observons d'abord, sans rien supposer sur les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$, que la fonction Y peut être regardée comme une fonction doublement périodique avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$; elle admet alors comme pôles doubles, dans le parallélogramme correspondant, les points o et $\omega_1 + \omega_3$; la formule de décomposition en éléments simples fournit immédiatement la relation

$$Y = p(u) + p(u + \omega_2) - e_2 = y + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{y - e_2}$$

où l'on a écrit $p u$, ou y, au lieu de $p(u \mid \omega_1, \omega_3)$.

En désignant par E_1, E_2, E_3 les valeurs de Y pour $u = \frac{\omega_3 + \omega_1}{2}$, ω_3, $\frac{\omega_3 - \omega_1}{2}$, on trouve de suite

$$E_1 = 2m - e_2,$$

$$E_2 = -2e_2,$$

$$E_3 = 2m' - e_2,$$

où l'on a posé, comme au n° 594,

$$m = p\,\frac{\omega_3 + \omega_1}{2} = e_2 + \sqrt{e_2 - e_1}\,\sqrt{e_2 - e_3},$$

$$m' = p\,\frac{\omega_3 - \omega_1}{2} = e_2 - \sqrt{e_2 - e_1}\,\sqrt{e_2 - e_3};$$

on en déduit sans peine les relations

$$Y - E_1 = \frac{(y-m)^2}{y-e_2}, \qquad Y - E_2 = \frac{(y-e_1)(y-e_3)}{y-e_2},$$

$$Y - E_3 = \frac{(y-m')^2}{y-e_2}, \qquad \frac{dY}{dy} = \frac{(y-m)(y-m')}{(y-e_2)^2}.$$

Si nous nous plaçons maintenant dans le cas où ω_1, ω_3 sont des imaginaires conjuguées, la partie réelle et le coefficient de i étant positifs dans ω_3, les quantités $e_1 = A + Bi$, $e_3 = A - Bi$ seront des imaginaires conjuguées, $e_2 = -2A$ sera réel et B sera positif (n° 565) : $\sqrt{e_2 - e_1}$, $\sqrt{e_2 - e_3}$ sont des imaginaires conjuguées et leur produit $\sqrt{9A^2 + B^2}$ est positif. Les formules précédentes coïncident avec celles du n° 612. Les points m et m' sont les points d'intersection (le premier à droite, le second à gauche) du cercle (e_2) décrit du point e_2 comme centre et passant par les points e_1, e_3. Si l'on imagine pour un moment que la variable Y soit figurée sur le même plan que la variable y, on voit que m, m' sont au milieu, le premier de e_2, E_1, le second de e_2, E_3, et que le point Y, dont l'affixe est liée à celle du point y par la relation

$$Y - e_2 = y - e_2 + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{y - e_2},$$

peut s'obtenir par la construction suivante : on prend le symétrique (n° 559) y_1 du point y par rapport au cercle (e_2), puis le symétrique y' du point y_1 par rapport à l'axe des quantités réelles; en se rappelant que $(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)$ est le carré du rayon du cercle (e_2), on voit de suite que l'on a

$$Y - e_2 = (y - e_2) + (y' - e_2);$$

Y est donc le quatrième sommet du parallélogramme dont y, e_2, y' sont trois sommets. Aux deux points y, y' liés par la construction que l'on vient de dire, correspond évidemment un même point Y; l'un des points y, y' est à l'extérieur du cercle (e_2), l'autre est à l'intérieur. Si l'un des points y, y' est sur le cercle (e_2), il en est de même de l'autre, et, dans ce cas, le point Y est sur l'axe des quantités réelles entre e_2 et E_1 ou entre e_2 et E_3 suivant que la partie réelle de y est positive ou négative. Lorsque y est un point de l'axe réel, y_1 et y' sont tous deux confondus avec le conjugué harmonique de y par rapport aux points m, m' et le point Y est sur l'axe des quantités réelles, à droite de E_1 ou à gauche de E_3, suivant que y et y' sont à droite ou à gauche de e_2. Si y croît de e_2 à m, ou décroît de $+\infty$ à m, Y décroît

de $+\infty$ à ε_1; de même si y décroît de e_2 à m', ou croît de $-\infty$ à m', Y croît de $-\infty$ à E_3. Ces diverses remarques se raccordent très facilement aux considérations développées aux nos 594, 595 et dans la Note qui termine le Tableau des formules. Le lecteur peut, par exemple, se reporter à la figure de la page 164 pour ce qui concerne la correspondance entre le plan des y et le plan des u, défini par la relation $y = pu$.

Remarquons d'abord que les deux points y, y', qui se correspondent par la construction que nous venons d'indiquer, peuvent être regardés comme les images de deux points u, symétriques par rapport au point $\frac{1}{2}(\omega_3+\omega_1)$; à ces deux points u dont la somme des affixes est $\omega_3+\omega_1$ correspondent, en effet, deux points $y = pu$ et $y' = p(u+\omega_2)$, en sorte que l'on a

$$(y-e_2)(y'-e_2) = (e_2-e_1)(e_2-e_3).$$

L'image du rectangle du plan des u remplit tout le plan des y et conduit au système de coupure figuré à la page 164; l'image du même rectangle, en vertu de la transformation

$$Y = p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_3+\omega_1}{2}, \frac{\omega_3-\omega_1}{2}\right)$$

remplit deux fois le plan des Y. Si l'on sépare ce rectangle en deux autres, par la droite qui va de ω_1 à ω_3, droite dont l'image dans le plan des y est l'arc $\varepsilon_1 m \varepsilon_3$ du cercle (ε_2), le rectangle de gauche aura son image, dans le plan des y, à l'*extérieur* du cercle (ε_2). Si le point u décrit le contour de ce rectangle, en passant successivement par les points 0, $\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)$, ω_1, $\frac{1}{2}(\omega_3+\omega_1)$, ω_3, $\frac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)$, 0, le point y se mouvra sur l'axe des quantités réelles de $-\infty$ à m'; puis, sur le cercle (ε_2) de m' à ε_1, de ε_1 à m, de m à ε_3, de ε_3 à m'; puis, sur l'axe des quantités réelles de m' à $-\infty$, en ayant toujours l'aire indéfinie à sa gauche; le point correspondant Y ne quittera pas l'axe des quantités réelles et s'y mouvra de $-\infty$ à E_3, de E_3 à E_2, de E_2 à E_1, puis reviendra de E_1 à E_2, de E_2 à E_3, de E_3 à $-\infty$. L'image du rectangle de gauche envisagé (dans le plan des u) remplit tout le plan des Y.

De même, l'image du second rectangle du plan des u, symétrique du premier par rapport au point $\frac{\omega_3+\omega_1}{2}$, se fait à l'intérieur du cercle (ε_2) dans le plan des y, et remplit tout le plan des Y. Si le point u décrit le contour de ce rectangle en passant successivement par les points $\omega_3+\omega_1$, $\frac{1}{2}(\omega_1+3\omega_3)$, ω_3, $\frac{1}{2}(\omega_3+\omega_1)$, ω_1, $\frac{1}{2}(\omega_3+3\omega_1)$, $\omega_3+\omega_1$, le point y se meut sur l'axe des quantités réelles de ε_2 à m',

puis sur le cercle (ε_2) de m' à ε_3, m, ε_1, m' pour revenir le long de l'axe des quantités réelles de m' à ε_2; le point correspondant Y décrira le même système de coupures que précédemment.

On n'a dès lors aucune peine, lorsqu'on substitue dans une intégrale définie $\int f(y)\,dy$, à la variable y, soit la variable Y, soit la variable u, à voir comment les chemins d'intégration se correspondent.

Au lieu de la transformation $\mathrm{Y} = p\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_3+\omega_1}{2}, \frac{\omega_3-\omega_1}{2}\right)$, on peut employer la transformation

$$\mathrm{Z} = p(u \mid \omega_3 + \omega_1, \omega_3 - \omega_1);$$

c'est alors $y = pu$ qui s'exprime rationnellement au moyen de Z. En conservant les mêmes notations, sauf à désigner maintenant par E'_1, E'_2, E'_3 les valeurs de Z pour $u = \omega_3 + \omega_1$, $2\omega_3$, $\omega_3 - \omega_1$, on trouve sans peine, par exemple, en se servant de la formule d'homogénéité (III_3),

$$\mathrm{E}'_1 = \tfrac{1}{4}\mathrm{E}_1, \qquad \mathrm{E}'_2 = \tfrac{1}{4}\mathrm{E}_2, \qquad \mathrm{E}'_3 = \tfrac{1}{4}\mathrm{E}_3,$$

puis, par la formule de décomposition en éléments simples,

$$\begin{aligned} y &= p(u \mid \omega_3+\omega_1, \omega_3-\omega_1) + p(u - 2\omega_3 \mid \omega_3+\omega_1, \omega_3-\omega_1) - \mathrm{E}'_2 \\ &= \mathrm{Z} + \frac{(\mathrm{E}'_2 - \mathrm{E}'_1)(\mathrm{E}'_2 - \mathrm{E}'_3)}{\mathrm{Z} - \mathrm{E}'_2} = \mathrm{Z} - \frac{1}{4}\frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{Z}-\mathrm{A}}, \end{aligned}$$

en continuant de poser

$$e_1 = \mathrm{A} + \mathrm{B}i, \qquad e_2 = -2\mathrm{A}, \qquad e_3 = \mathrm{A} - \mathrm{B}i.$$

On en tire

$$y - e_1 = \frac{\left(\mathrm{Z} - \frac{3e_1+e_3}{4}\right)^2}{\mathrm{Z}-\mathrm{A}}, \qquad y - e_2 = \frac{(\mathrm{Z}-\mathrm{E}'_1)(\mathrm{Z}-\mathrm{E}'_3)}{\mathrm{Z}-\mathrm{A}},$$

$$y - e_3 = \frac{\left(\mathrm{Z} - \frac{3e_3+e_1}{4}\right)^2}{\mathrm{Z}-\mathrm{A}}; \qquad \frac{dy}{d\mathrm{Z}} = \frac{\left(\mathrm{Z} - \frac{3e_1+e_3}{4}\right)\left(\mathrm{Z} - \frac{3e_3+e_1}{4}\right)}{\mathrm{Z}-\mathrm{A}}.$$

La construction ud point y au moyen du point Z s'effectue en se servant du cercle (A) décrit du point $\mathrm{A} = \mathrm{E}'_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$ comme centre avec un rayon égal à $\frac{1}{2}\mathrm{B}$. On prend le symétrique Z_1 de Z par rapport au cercle (A), puis le symétrique Z' de Z_1 par rapport à la droite qui joint les deux points e_1, e_3; le point y est le sommet opposé au point A d'un parallélogramme dont trois sommets sont A, Z, Z'; les deux points Z, Z' fournissent le même point y.

La transformation précédente peut être commode quand on a affaire à des valeurs réelles de y; on observera que le point u allant en ligne droite de o à $\omega_1 + \omega_3$, puis de $\omega_1 + \omega_3$ à $2\omega_3$, le point Z va sur l'axe des quantités réelles de $+\infty$ à E'_1, puis de E'_1 à A, et le point y, aussi sur l'axe des quantités réelles, de $+\infty$ à $-\infty$.

Ces résultats mettent en évidence l'existence d'une transformation rationnelle à coefficients réels $x = \dfrac{\alpha z^2 + \beta z + \gamma}{\alpha' z^2 + \beta' z + \gamma'}$, qui transforme une différentielle de la forme $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, où le polynome du quatrième degré $R(x)$ à coefficients réels admet deux racines réelles et deux racines imaginaires en y, en une différentielle de la forme

$$\int \frac{dz}{\sqrt{4(Z - E'_1)(Z - E'_2)(Z - E'_3)}}.$$

On peut, en effet, d'abord changer la différentielle $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ par une transformation linéaire en une différentielle de la forme

$$\int \frac{dy}{-\sqrt{4(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}},$$

on posera ensuite

$$y = Z - \frac{B^2}{4(Z - A)}.$$

NOTE 5.

Sur le sens de la variation des fonctions $\mathfrak{S}$ pour des valeurs réelles de l'argument dans le cas normal.

Les résultats établis au n° 175, relatifs à la variation des fonctions $\mathfrak{S}$ dans le cas où $\frac{\tau}{i}$ est positif et où la variable v est réelle, deviennent intuitifs lorsqu'on se reporte aux formules de décomposition en facteurs (XXXII_{5-8}). Observons d'abord que, dans les quatre seconds membres, les produits infinis que l'on voit figurer sont formés de facteurs toujours positifs qui tous varient dans le même sens que $-\cos 2v\pi$ pour $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_4$, que $+\cos 2v\pi$ pour $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$; le sens de la variation du produit infini est le même que celui de ses facteurs. Le sens de la variation de $\mathfrak{S}_3(v)$ et de $\mathfrak{S}_4(v)$ est ainsi évident. Quant à $\mathfrak{S}_1(v)$ et à $\mathfrak{S}_2(v)$, en tenant compte des facteurs $\sin v$ et $\cos v$, on voit que la première fonction augmente de o à $\mathfrak{S}_1(\frac{1}{2}) = \mathfrak{S}_2(0)$, que la seconde diminue de $\mathfrak{S}_2(0)$ à o, quand v augmente de o à $\frac{1}{2}$; les formules (XXXIV_3) permettent ensuite de reconnaître le sens de la variation quand v augmente de $\frac{1}{2}$ à 1.

Des considérations analogues s'appliquent aux fonctions

$$\frac{1}{i}\mathfrak{S}_1(iv), \quad \mathfrak{S}_2(iv), \quad \mathfrak{S}_3(iv), \quad \mathfrak{S}_4(iv),$$

décomposées en facteurs où figurent $\operatorname{sh} v$, $\operatorname{ch} v$ au lieu de $\sin v$, $\cos v$.

On reconnaît directement sur les expressions de $\mathfrak{S}_2(iv)$, $\mathfrak{S}_3(iv)$ que ces fonctions, toujours positives, varient dans le même sens que v; puis, directement encore sur l'expression de $\mathfrak{S}_4(iv)$, que cette fonction décroît quand v croît de o à $\frac{\tau}{2i}$; quand v croît de $\frac{\tau}{2i}$ à $\frac{\tau}{i}$, $\mathfrak{S}_4(iv)$ continue de décroître, comme le montre la relation entre $\mathfrak{S}_4(iv)$ et $\mathfrak{S}_4(\tau - iv)$. Enfin la formule de passage de la fonction $\mathfrak{S}_4$ à la fonction $\mathfrak{S}_1$ montre que la fonction $\frac{1}{i}\mathfrak{S}_1(iv)$ croît quand v augmente de o à $\frac{\tau}{2i}$.

LETTRE DE CH. HERMITE A M. JULES TANNERY.

1. La lettre de Charles Hermite, que l'on va lire, demande quelques observations préliminaires.

Nous avons dit (nº 198) que les formules ($XLVI_{1,2,3}$) qui expriment au moyen de $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$ les fonctions $\varphi(\mathrm{T})$, $\psi(\mathrm{T})$, $\chi(\mathrm{T})$, où l'on suppose $\mathrm{T} = \dfrac{c + d\tau}{a + b\tau}$, en désignant par a, b, c, d des entiers liés par la relation $ad - bc = 1$, étaient dues à Hermite. Il les a données sans démonstration en 1858. *La démonstration qu'on trouvera dans cette lettre est la seule qu'il aura publiée.*

Cette démonstration, dans le cas où a, d sont impairs, b et c pairs (XX_6, cas 1°), repose sur la formule

$$\psi(\tau) = \frac{\mathfrak{I}_4(0\,|\,\tau)}{\mathfrak{I}_4(0\,|\,2\tau)},$$

qui est une conséquence immédiate des formules ($XXXVI_2$), ($XXXVIII_2$), ($XLVII_2$), ($XXVIII_5$). Cette formule a lieu quel que soit τ, donc aussi quand on y remplace τ par T. En supposant $b = 2b'$, $2c = c'$, on a d'ailleurs

$$2\mathrm{T} = \frac{c' + d\,2\tau}{a + b'\,2\tau},$$

et, puisque $ad - b'c'$ est égal à 1, on voit que les fonctions $\mathfrak{I}(0\,|\,2\mathrm{T})$ sont liées aux fonctions $\mathfrak{I}(0\,|\,2\tau)$ par les formules de transformation linéaire, comme les fonctions $\mathfrak{I}(0\,|\,\mathrm{T})$ aux fonctions $\mathfrak{I}(0\,|\,\tau)$. Le calcul se fait très facilement au moyen des formules XLII. Pour les fonctions $\mathfrak{I}(0\,|\,\mathrm{T})$, $\mathfrak{I}(0\,|\,\tau)$ on est, par hypothèse, dans le cas 1° du Tableau (XX_6); pour les fonctions $\mathfrak{I}(0\,|\,2\mathrm{T})$, $\mathfrak{I}(0\,|\,2\tau)$ on est dans le cas 1° ou dans le cas 3° de ce même Tableau, suivant que b' est pair ou impair; mais, dans les deux cas, ν est égal à 3, m''' est égal à d; c'est toujours la formule ($XLII_4$) qui s'applique et l'on a, en outre, à utiliser la seconde formule ($XLII_6$) et la troisième formule ($XLII_7$). En désignant par ε_1, ε_1''' les quantités analogues à ε, ε''', mais relatives aux entiers a, b', c', d, on obtient ainsi, en supposant $a > 0$,

$$\frac{\psi(\mathrm{T})}{\psi(\tau)} = \frac{\varepsilon'''}{\varepsilon_1'''} = \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b'}{a}\right) i^{-\frac{ab}{4} - \frac{ac}{2} - \frac{cd}{2} - c};$$

on a d'ailleurs, par une proposition d'arithmétique bien connue,

$$\left(\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{2b'}{a}\right) = i^{\frac{a^2-1}{4}}\left(\frac{b'}{a}\right),$$

et, par conséquent,

$$\psi(\mathrm{T}) = \psi(\tau)\, i^{\frac{a^2-1}{4} - \frac{ab}{4} - c\left(\frac{a+d}{2}+1\right)}.$$

De la relation $ad - bc = 1$, et de l'hypothèse que b et c sont pairs, il résulte que les nombres a et d sont tous deux congrus à 1 ou à -1 (mod. 4), et que, par suite, $a+d$ est le double d'un nombre impair; le nombre $c\left(\dfrac{a+d}{2}+1\right)$ est donc divisible par 4, et l'on peut écrire finalement

$$\psi(\mathrm{T}) = \psi(\tau)\, i^{\frac{a^2-ab-1}{4}}.$$

C'est la formule que Ch. Hermite établit dans sa lettre et d'où il déduit toutes les autres. Mais ce n'est pas ainsi qu'il procède.

2. C'est à lui encore qu'on doit les formules générales de transformation des fonctions $\mathfrak{Z}$; il les a données en 1858 dans le *Journal de Liouville*. Par une analyse très simple et très profonde, il a fait dépendre la constante qui figure dans ces formules, et dont le signe est si difficile à déterminer, de l'expression (¹)

$$\mathrm{S} = \sum_{\rho=0}^{b-1} e^{-\frac{i\pi a}{b}\left(\rho - \frac{1}{2}b\right)^2}.$$

En transformant la somme S au moyen des résultats dus à Gauss et en profitant des simplifications apportées à ces résultats par Lebesgue, dans différents Mémoires du *Journal de Liouville*, il a obtenu des formules équivalentes aux formules (XLII), que nous avons établies sous la forme donnée par M. H. Weber (*Ellipt. Funct.*), en partant des propriétés de $h(\tau)$ que l'on doit à M. Dedekind. Si nous n'avons pas adopté la démonstration d'Hermite, c'est qu'elle appartient à un ordre d'idées tout autre que celui où nous avons voulu nous placer, mais nous croyons devoir reproduire ici cette démonstration, d'une part à cause de sa beauté, d'autre part pour permettre au lecteur de mieux pénétrer la signification de la lettre de Ch. Hermite.

En appliquant la méthode qu'on lui doit (nos 273, 274, 381) pour trouver les fonctions (transcendantes) entières les plus générales qui soient doublement périodiques de troisième espèce avec des multiplicateurs donnés,

---

(¹) *Summatio quarumdam serierum singularium*, 1808; GAUSS, *Werke*, t. II, p. 9.

on voit immédiatement que la fonction (transcendante) entière la plus générale qui vérifie les équations fonctionnelles

$$(1) \qquad f(v+1) = (-1)^{\alpha} f(v), \qquad f(v+\tau) = (-1)^{\beta} e^{-i\pi(2v+\tau)} f(v),$$

où α, β sont des nombres entiers donnés, est la fonction

$$(2) \qquad \begin{cases} \theta_{\alpha,\beta}(v) = \sum\limits_{(n)} (-1)^{n\beta} e^{i\pi\tau\left[\left(n+\frac{1}{2}\alpha\right)^2 + \frac{2v}{\tau}\left(n+\frac{1}{2}\alpha\right)\right]} \\ \qquad = e^{\frac{1}{4}i\pi\tau\alpha^2 + i\pi\alpha v} \mathfrak{I}_3\left(v + \dfrac{\alpha\tau+\beta}{2}\right); \end{cases}$$

l'indice n placé sous le signe Σ indique ici, comme dans la suite, que n doit parcourir la suite de toutes les valeurs entières, négatives, nulle et positives. La notation $\theta_{\alpha,\beta}(v)$, employée par Hermite, a déjà été signalée dans la Note du n° 160, où l'on a expliqué comment elle se relie aux notations de Jacobi, que nous avons adoptées.

En désignant par α', β' deux nouveaux nombres entiers, en remplaçant dans l'égalité (2), v par $v + \frac{1}{2}(\alpha'\tau + \beta')$ et en remettant ensuite, à la place de $\mathfrak{I}_3[v + \frac{1}{2}(\alpha+\alpha')\tau + \frac{1}{2}(\beta+\beta')]$, son expression au moyen de $\theta_{\alpha+\alpha',\beta+\beta'}(v)$, qui résulte de cette même égalité (2), on trouve immédiatement

$$(3) \qquad \theta_{\alpha,\beta}\left(v + \tfrac{1}{2}\alpha'\tau + \tfrac{1}{2}\beta'\right) = e^{-i\pi\left(\alpha' v - \frac{1}{2}\alpha\beta' + \frac{1}{4}\tau\alpha'^2\right)} \theta_{\alpha+\alpha',\,\beta+\beta'}(v).$$

Cette formule, sauf quelques différences insignifiantes dans les notations, a été donnée sans explications dans la Note que nous venons de rappeler, ainsi que les deux relations, évidentes sur la définition même de la fonction $\theta_{\alpha,\beta}(v)$,

$$(4) \qquad \theta_{\alpha+2,\beta}(v) = (-1)^{\beta}\theta_{\alpha,\beta}(v), \qquad \theta_{\alpha,\beta+2}(v) = \theta_{\alpha,\beta}(v).$$

Quand nous aurons besoin de mettre en évidence la façon dont la fonction $\theta_{\alpha,\beta}(v)$ dépend de τ, nous l'écrirons $\theta_{\alpha,\beta}(v \mid \tau)$.

Il résulte clairement du n° 178 que, si l'on désigne par a, b, c, d quatre nombres entiers liés par la relation $ad - bc = 1$ et si l'on pose avec Hermite

$$(5) \qquad \Pi(v) = e^{i\pi b v^2 (a+b\tau)} \theta_{\alpha,\beta}[(a+b\tau)v \mid \tau],$$

la fonction $\Pi(v)$ ne diffère que par un facteur constant de la fonction $\theta_{\alpha_1,\beta_1}\left(v \,\middle|\, \dfrac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$, en désignant par α_1, β_1 des nombres entiers convenablement choisis. Ce premier résultat, que nous avons déduit de la théorie de la transformation linéaire des fonctions σ, ressort d'ailleurs aussi très facilement, ainsi que l'expression des entiers α_1, β_1, au moyen de a, b, c, d, α, β, du théorème de Ch. Hermite sur la résolution des équations fonctionnelles (1). En effet, la formule (3) permet de calculer ce que devient

le second membre de l'équation (5) quand on y augmente v de 1 ou de $T = \frac{c+d\tau}{a+b\tau}$, puisque alors la quantité $(a+b\tau)v$ s'augmente de $a+b\tau$ ou de $c+d\tau$; on trouve ainsi, après des réductions faciles, en tenant compte des formules (4) et de la relation $ad-bc=1$,

$$(6)\quad \Pi(v+1)=(-1)^{\alpha_1}\Pi(v), \qquad \Pi(v+T)=(-1)^{\beta_1}e^{-i\pi(2v+T)}\Pi(v),$$

où

$$\alpha_1 = a\alpha+b\beta+ab, \qquad \beta_1 = c\alpha+d\beta+cd.$$

Les équations fonctionnelles qui vérifient ainsi la fonction (transcendante) entière $\Pi(v)$ ne diffèrent des équations (1) que par le changement de α, β, τ en α_1, β_1, T; cette fonction ne peut donc différer de $\theta_{\alpha_1,\beta_1}(v\,|\,T)$ que par un facteur $\mathfrak{C}$, indépendant de v, et qu'il reste à déterminer. En d'autres termes, on a

$$\theta_{\alpha,\beta}[(a+b\tau)v\,|\,\tau]\,e^{i\pi b(a+b\tau)v^2} = \mathfrak{C}\,\theta_{\alpha_1,\beta_1}(v\,|\,T),$$

ou, en remontant à la définition des fonctions θ,

$$(7)\qquad \sum_{(n)} e^{i\pi\varphi(v,n)} = \mathfrak{C}\sum_{(n)}(-1)^{n\beta_1}\,e^{i\pi T(n+\frac{1}{2}\alpha_1)^2+2i\pi v(n+\frac{1}{2}\alpha_1)},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\varphi(v,n) = b(a+b\tau)v^2+(2n+\alpha)(a+b\tau)v+\tfrac{1}{4}\tau(2n+\alpha)^2-n\beta.$$

Observons, en passant, que, à la propriété de $\Pi(v)$ de se reproduire, multipliée par $(-1)^{\alpha_1}$, quand on y remplace v par $v+1$, correspond la propriété, bien facile à vérifier, de la fonction $\varphi(v,n)$, qu'exprime l'égalité

$$\varphi(v+1,n)-\varphi(v,n+b) = 2an+\alpha_1.$$

Il sera commode, pour ce qui va suivre, de multiplier les deux membres de (7) par $e^{-i\pi v\alpha_1}$, de manière à faire disparaître $i\pi v\alpha_1$ dans l'exposant de chaque terme du second membre et à pouvoir profiter tout à l'heure de ce que l'intégrale $\int_0^1 e^{2i\pi nv}\,dv$ est nulle ou égale à 1, suivant que n est différent de 0 ou égal à 0. L'égalité (7) est alors remplacée par la suivante

$$(8)\qquad \sum_{(n)} e^{i\pi\psi(v,n)} = \mathfrak{C}\sum_{(n)}(-1)^{n\beta_1}\,e^{i\pi T(n+\frac{1}{2}\alpha_1)^2+2i\pi nv},$$

où la fonction

$$\psi(v,n) = \varphi(v,n)-\alpha_1 v$$

jouit évidemment de la propriété

$$\psi(v+1,n)-\psi(v,n+b) = 2an,$$

ou, plus généralement, de la propriété

$$\psi(v+\rho, n) - \psi(v, n+\rho b) = 2a\rho n + ab\rho(\rho-1),$$

en désignant par ρ un entier quelconque, en sorte que l'on a

$$(9) \qquad e^{i\pi\psi(v+\rho,n)} = e^{i\pi\psi(v,n+b\rho)}.$$

Nous supposerons maintenant que b soit entier *positif;* cela ne restreindra pas la généralité de la solution, puisque $\frac{c+d\tau}{a+b\tau}$ ne change pas quand on y change les signes de tous les nombres a, b, c, d. En intégrant entre 0 et 1 les deux membres de l'équation (8) et tenant compte d'une remarque antérieure, on trouve

$$(10) \qquad \mathfrak{C}\, e^{\frac{1}{4}i\pi\mathrm{T}\alpha_1^2} = \int_0^1 \left(\sum_{(n)} e^{i\pi\psi(v,n)}\right) dv.$$

Le terme $e^{i\pi\psi(v,n)}$ de la série qui figure sous le signe d'intégration, n'est pas modifié si l'on augmente v de r, pourvu que l'on diminue n de rb, ainsi qu'il résulte évidemment de l'égalité (9); dès lors, si l'on réunit ensemble, dans la série $\sum_{(n)} e^{i\pi\psi(v,n)}$, les termes pour lesquels les valeurs de n sont congrues, suivant le module b, de manière à écrire cette série sous la forme

$$\sum_{(n)} e^{i\pi\psi(v,nb)} + \sum_{(n)} e^{i\pi\psi(v,nb+1)} + \ldots + \sum_{(n)} e^{i\pi\psi(v,nb+b-1)},$$

il est clair qu'on pourra tout aussi bien l'écrire

$$\sum_{(n)} e^{i\pi\psi(v+n,0)} + \sum_{(n)} e^{i\pi\psi(v+n,1)} + \ldots + \sum_{(n)} e^{i\pi\psi(v+n,b-1)};$$

en observant enfin que l'on a

$$\int_0^1 e^{i\pi\psi(v+n,\rho)}\, dv = \int_n^{n+1} e^{i\pi\psi(v,\rho)}\, dv,$$

on voit que l'égalité (10) pourra s'écrire sous la forme

$$(11) \qquad \mathfrak{C}\, e^{\frac{1}{4}i\pi\mathrm{T}\alpha_1^2} = \sum_{\rho=0}^{b-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\psi(v,\rho)}\, dv.$$

Quant aux b intégrales qui figurent dans le second membre, en se rappelant que $\psi(v, \rho)$ est un trinome du second degré en v, elles se calculent au moyen de la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(px^2+2qx+r)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{-ip}}\, e^{i\pi\frac{pr-q^2}{p}},$$

dans laquelle la variable d'intégration est réelle et qui est valable pourvu que le coefficient de i dans p soit positif, condition qui se trouve vérifiée pour $\varphi(v, \rho)$ puisque le coefficient de v^2 est $ab + b^2\tau$. Dans le second membre, la partie réelle de $\sqrt{-ip}$ est supposée positive (1). On trouve ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\psi(v,\rho)}\,dv = \frac{1}{\sqrt{-ib(a+b\tau)}}\,e^{-i\pi\frac{a}{b}\left(\rho-\frac{b}{2}\right)^2},$$

---

(1) Cette formule est due à Cauchy (*Œuvres*, 2e s., t. VII, p. 280). Cauchy avait déjà aperçu, pour un cas particulier, le rôle qu'elle peut jouer dans la théorie qui nous occupe, rôle que Ch. Hermite a mis en pleine lumière dans le cas général. L'Analyse de Cauchy à peine modifiée peut être résumée comme il suit :

Désignons par A, B deux nombres quelconques, dont toutefois le premier a son argument trigonométrique compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$, et considérons l'intégrale rectiligne

$$\int_{x_0}^{x_1} e^{-(Ax+B)^2}\,dx$$

où la variable d'intégration x suit l'axe des quantités réelles, du point x_0 vers $-\infty$, au point x_1 vers $+\infty$. En posant $t = Ax + B$, on remplace cette intégrale rectiligne par une autre intégrale rectiligne

$$\frac{1}{A}\int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2}\,dt,$$

dans laquelle la variable d'intégration t décrit la droite qui va de $t_0 = Ax_0 + B$ à $t_1 = Ax_1 + B$. La fonction e^{-t^2} étant holomorphe dans tout le plan, il sera évidemment démontré que l'intégrale précédente diffère très peu des intégrales rectilignes

$$\int_{x_0}^{x_1} e^{-t^2}\,dt, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi},$$

si l'on prouve que les deux intégrales rectilignes

$$\int_{x_0}^{t_0} e^{-t^2}\,dt, \qquad \int_{x_1}^{t_1} e^{-t^2}\,dt$$

sont très petites. Il suffira de considérer la seconde.

Lorsque la variable $t = Re^{i\varphi}$ décrit le segment de droite qui va de x_1 à $t_1 = Ax_1 + B$, son argument φ, d'abord nul, augmente en valeur absolue, jusqu'à ce que t soit en t_1. D'ailleurs, comme x_1 est infiniment grand positif, l'argument de t_1 diffère infiniment peu de celui de Ax_1 ou de A ; l'argument de t reste donc inférieur, en valeur absolue, à un nombre $\omega < \frac{\pi}{4}$; on a donc, sur la droite qui va de x_1 à t_1,

$$|e^{-t^2}| < e^{-R_1^2\cos 2\omega} \qquad (\cos 2\omega > 0),$$

en désignant par R_1 le minimum de R. L'intégrale est donc moindre que le pro-

où l'on suppose

$$\lambda = e^{-\frac{i\pi\alpha_1^2}{4v(a+b\tau)}}\, e^{\frac{i\pi}{4b}(ab^2+a\alpha^2+2b\alpha\beta+2ab\alpha)}.$$

On en déduit par un calcul aisé, dans lequel on a toutefois à tenir compte de la condition $ad - bc = 1$,

$$\mathfrak{T} = \frac{S\delta}{\sqrt{-ib(a+b\tau)}},$$

où l'on suppose la partie réelle du radical positive et où

$$S = \sum_{\rho=1}^{b-1} e^{-i\pi\frac{a}{b}\left(\rho-\frac{b}{2}\right)^2}$$

et

$$\delta = e^{-\frac{1}{4}i\pi[ac\alpha^2+2bc\alpha\beta+bd\beta^2+2ab(c\alpha+d\beta)+ab^2c]}.$$

3. La somme S s'évalue au moyen des *sommes de Gauss* [1]. Nous donnons, dans ce qui suit, toutes les indications relatives à ces sommes, nécessaires pour retrouver les formules définitives d'Hermite.

On appelle *somme de Gauss* une expression de la forme

$$\varphi(a, b) = \sum_{(r)} e^{2i\pi\frac{a}{b}r^2},$$

où a et b sont deux entiers (positifs ou négatifs) premiers entre eux, et où r, l'indice de sommation, doit prendre $|b|$ valeurs entières incongrues suivant le module b, que nous désignerons par $r_0, r_1, \ldots, r_{b-1}$, par exemple les valeurs $0, 1, 2, \ldots, |b|-1$. Il est clair que la valeur de la somme ne dépend pas du système choisi pour les nombres $r_0, r_1, \ldots, r_{b-1}$.

---

duit de $e^{-R_1^2\cos 2\omega}$ par la longueur du chemin d'intégration qui est évidemment du même ordre de grandeur que R_1; or le produit $R_1 e^{-R_1^2\cos 2\omega}$ tendant vers zéro quand R_1 augmente indéfiniment, la proposition est démontrée et l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(Ax+B)^2}\,dx = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{A}\sqrt{\pi}.$$

Supposer que l'argument de A est compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$, c'est supposer que la partie réelle de A^2 est positive. On remarquera enfin que A est celle des racines de A^2 dont la partie réelle est positive.

Le résultat annoncé est complètement justifié dans le cas particulier considéré; l'extension au cas général est immédiate.

[1] *Summatio quarumdam serierum singularium* (*Werke*, t. II, p. 11).

Les propriétés suivantes de la fonction $\varphi(a, b)$ apparaissent immédiatement ([1]) sur la définition.

Quand on change de signe l'un ou l'autre des nombres a, b, la quantité $\varphi(a, b)$ est remplacée par la quantité conjuguée. On ne change pas $\varphi(a, b)$ en remplaçant a par un entier a' congru à a suivant le module b.

Étant donnés les deux entiers a, a', premiers à b, s'il existe un entier m tel que l'on ait

$$a' \equiv m^2 a \pmod{b},$$

on aura

$$\varphi(a', b) = \varphi(a, b);$$

car m étant forcément premier à b, l'ensemble des restes, pris suivant le module b, des nombres mr est le même que l'ensemble des restes des nombres r. En particulier, si l'on a

$$a \equiv m^2 \pmod{b},$$

on aura

$$\varphi(a, b) = \varphi(1, b).$$

On a aussi

$$\varphi(a, b)\,\varphi(b, a) = \varphi(1, ab).$$

Le produit $\varphi(a, b)\,\varphi(b, a)$ est, en effet, égal à

$$\sum_{r,r'} e^{2i\pi\frac{a^2 r^2 + b^2 r'^2}{ab}} = \sum_{r,r'} e^{2i\pi\frac{(ar+br')^2}{ab}},$$

où r doit prendre $|b|$ valeurs incongrues suivant le module b, tandis que r' prend séparément $|a|$ valeurs incongrues suivant le module a; dans ces conditions, $ar + br'$ doit prendre $|ab|$ valeurs incongrues suivant le module ab; le produit $\varphi(a, b)\,\varphi(b, a)$ est donc égal à $\varphi(1, ab)$.

On a aussi

$$\varphi(1, a) = \sqrt{a}\, i^{1-a}\frac{1+i^a}{1+i},$$

en désignant par $\sqrt{a}$ la valeur positive de la racine si a est positif, et en supposant $\sqrt{a} = -i\left|\sqrt{-a}\right|$ si a est négatif. Il suffit d'établir cette proposition quand a est positif; la seconde partie résulte, en effet, de la première, en changeant a en $-a$, et se rappelant que $\varphi(1, a)$ est alors remplacée par la quantité conjuguée ([2]). Kronecker a montré ([3]) que l'on

---

([1]) *Voir* Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie von Lejeune-Dirichlet*, 4e éd., p. 293.

([2]) Cette proposition résume divers cas énumérés par Gauss dans le Mémoire cité et qu'il a traités d'une façon purement algébrique.

([3]) *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1880.

obtient rapidement la formule relative au cas où a est un nombre positif, en écrivant que l'intégrale

$$\int \frac{e^{2i\pi\frac{z^2}{a}}}{1 - e^{2i\pi z}}\,dz,$$

prise le long d'un contour qu'on va définir, est égale à $2i\pi$ multiplié par la somme des résidus de la fonction sous le signe $\int$ relatifs aux pôles 1, 2, ..., $\frac{a-1}{2}$ situés à l'intérieur du contour. Celui-ci est un rectangle symétrique par rapport à l'axe des quantités réelles, dont un côté, situé sur l'axe des quantités purement imaginaires, va du point $-y_1$ très éloigné vers le bas, au point y_1 situé très haut; le côté parallèle à celui-là passe par le point $\frac{a}{2}$; pour éviter le pôle 0, on décrit de ce point comme centre, à l'intérieur du rectangle, un demi-cercle de rayon très petit, et l'on supprime du rectangle l'intérieur de ce demi-cercle; si a est pair, $\frac{a}{2}$ est un pôle que l'on évite de la même façon; les demi-cercles ainsi décrits entrent naturellement dans le contour. Il est aisé de voir que la partie de l'intégrale qui correspond aux côtés parallèles à l'axe des quantités réelles est négligeable, quand $|y_1|$ est très grand. On parvient aisément, quand a est impair, à la formule

$$\sum_{r=1}^{r=\frac{a-1}{2}} e^{\frac{2i\pi r^2}{a}} = -\tfrac{1}{2} + [i - (-i)^{a+1}] \int_0^{\infty} e^{-\frac{2i\pi y^2}{a}}\,dy,$$

et la méthode même permet d'affirmer que l'intégrale rectiligne qui figure dans le second membre a un sens. En multipliant par 2, remarquant que dans la somme $\Sigma\, e^{\frac{2i\pi r^2}{a}}$, étendue aux valeurs $r = 1, 2, \ldots, a-1$, les termes à égale distance des extrêmes sont égaux, changeant enfin y en $x\sqrt{a}$, il vient

$$2\sqrt{a}\,[i - (-i)^{a+1}] \int_0^{\infty} e^{-2i\pi x^2}\,dx = \sum_{r=0}^{r=a-1} e^{\frac{2i\pi r^2}{a}}.$$

La valeur de l'intégrale définie qui figure dans le premier membre de cette formule est $\frac{1}{4}(1 - i)$; elle se déduit immédiatement de celle de l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt$ qui est, comme on sait, égale à $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; elle résulte d'ailleurs aussi de la formule même, pour $a = 3$. On trouve finalement

$$\sum_{r=0}^{r=a-1} e^{\frac{2i\pi r^2}{a}} = \sqrt{a}\,\frac{i + i^{1-a}}{1 + i} = \varphi(1, a).$$

C'est le résultat annoncé ; il subsiste pour a pair, comme on le voit sans peine en reprenant les calculs, après avoir modifié, comme on l'a expliqué, le chemin d'intégration. Le fait que $\varphi(1, a)$ est nul, quand a est congru à $2(\text{mod}.\, 4)$ et n'est pas nul quand a n'est pas congru à $2(\text{mod}.\, 4)$, se reconnaît directement.

Posons maintenant, en supposant que b ne soit pas congru à $2\,(\text{mod}.\, 4)$,

$$\varphi(a, b) = (a, b)\,\varphi(1, b),$$

et cherchons à déterminer la valeur de (a, b) qui n'a de sens que sous la condition précédente.

On observera d'abord que, en vertu de cette définition, $(1, b) = 1$, que, en vertu des propriétés de $\varphi(a, b)$, on a $(a, b) = (a', b)$ quand a et a' sont congrus mod. b ; enfin qu'on peut, sans changer la valeur de (a, b), supprimer de a tout facteur carré parfait qui s'y trouverait.

En supposant qu'aucun des deux nombres a, b ne soit congru à $2(\text{mod}.\, 4)$, l'égalité $\varphi(a, b)\,\varphi(b, a) = \varphi(1, ab)$ et l'expression de $\varphi(1, a)$ fournissent de suite la relation

$$(a, b)\,(b, a) = \varepsilon_{a,b}\,\frac{(1 + i^{ab})\,(1 + i)}{i^{(a-1)(b-1)}\,(1 + i^{a})\,(1 + i^{b})}, \tag{12}$$

où $\varepsilon_{a,b}$ est égal à 1 si l'un des nombres a, b est positif et à -1 si ces deux nombres sont négatifs. Cette égalité se réduit à

$$(a, b)\,(b, a) = \varepsilon_{a,b}$$

si l'un des nombres a, b est de la forme $4n + 1$, et à

$$(a, b)\,(b, a) = -\,\varepsilon_{a,b}$$

s'ils sont tous les deux de la forme $4n - 1$, donc enfin à la forme

$$(a, b)\,(b, a) = (-1)^{\frac{(a-1)\,(b-1)}{4}}\,\varepsilon_{a,b},$$

si l'on sait seulement qu'ils sont tous les deux impairs.

Supposons qu'on veuille calculer (a, b) dans le cas où b est impair. On peut toujours supposer a impair et moindre que b en valeur absolue, car il existe toujours un nombre impair a' congru à $a(\text{mod}.\, b)$ et moindre que b en valeur absolue, c'est le reste positif de la division de a par b si ce reste est impair, et, dans le cas contraire, ce reste diminué de b ; on remplacera a par a'.

Supposons donc a impair et $|a| < |b|$; l'égalité précédente ramène le calcul de (a, b) à celui de (b, a), et le calcul de (b, a) se ramène ensuite, comme on vient de l'expliquer, au calcul d'un symbole (b', a), où b' est impair et où $|b'| < |a|$. En continuant de la même façon, on voit que le calcul de (a, b) se ramène au calcul d'un symbole de la forme $(\pm 1, \alpha)$,

où α est impair, positif ou négatif, et que l'on a

$$(a, b) = \pm(\pm 1, \alpha).$$

D'ailleurs $(1, \alpha) = 1$, et l'on a

$$(-1, \alpha) = \frac{\varphi(-1, \alpha)}{\varphi(1, \alpha)} = i^{\alpha \mp 1},$$

en prenant le signe supérieur ou inférieur suivant que α est positif ou négatif, comme on le voit en recourant à la valeur de $\varphi(1, \alpha)$, et en se rappelant que $\varphi(-1, \alpha)$ n'est autre chose que la quantité conjuguée de $\varphi(1, \alpha)$; α étant impair on voit que (a, b) est égal à ± 1.

Les calculs que l'on vient d'indiquer sont très analogues à ceux du n° 229; en se reportant à ce que l'on a dit alors, le lecteur verra de suite que l'on a

$$(a, b) = \left(\frac{a}{b}\right),$$

toutes les fois que ce dernier symbole est défini, c'est-à-dire lorsque b est impair et que les deux nombres a, b ne sont pas tous deux négatifs. Nous avons, en effet, établi relativement au symbole (a, b) toutes les propriétés relatives au symbole de Legendre-Jacobi, sauf la propriété $(a, b) = (a, -b)$; or celle-ci résulte de ce que (a, b) est réel et de ce que $\dfrac{\varphi(a, b)}{\varphi(1, b)}$ se change en la quantité conjuguée, c'est-à-dire ne change pas, quand on change b en $-b$.

Supposons maintenant a impair et b divisible par 4. La formule (12) donne alors l'une ou l'autre des deux relations

$$(a, b)(b, a) = \varepsilon_{a,b}, \qquad (a, b)(b, a) = -i\varepsilon_{a,b},$$

dont la première est valable si a est de la forme $4n+1$, la seconde si a est de la forme $4n-1$. Le symbole (b, a) se calculera comme on vient de l'expliquer; a étant impair, il est égal à ± 1, en sorte que l'on a finalement

$$(a, b) = \varepsilon_{a,b}(b, a) \quad \text{ou} \quad (a, b) = -i\varepsilon_{a,b}(b, a)$$

suivant que a est de la forme $4n+1$ ou $4n-1$.

En résumé, on sait calculer $\varphi(a, b)$ toutes les fois que b est impair ou divisible par 4 et sa valeur est ± 1 ou $\pm i$; quand b est le double d'un nombre impair, $\varphi(a, b)$ est nul.

Nous avons à appliquer ces résultats au calcul de la somme

$$S = \sum_{\rho=0}^{\rho=b-1} e^{-\frac{i\pi a}{b}\left(\rho - \frac{1}{2}b\right)^2},$$

où b est un entier positif.

Supposons d'abord que b soit pair. On reconnaît de suite que l'élément

de la somme ne change pas quand on remplace ρ par un nombre qui lui soit congru (mod. b) et qui, par suite, est de la même parité; d'ailleurs, quand ρ prend les valeurs $0, 1, 2, \ldots, b-1$, $\rho - \frac{1}{2}b$ prend un système de b valeurs incongrues (mod. b), et, puisque la somme $\sum e^{-\frac{i\pi a}{b}r^2}$ ne dépend pas du système de b valeurs incongrues que parcourt r, on voit de suite que l'on a

$$S = \sum_{r=0}^{r=b-1} e^{-\frac{i\pi a}{b}r^2} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{r=2b-1} e^{-\frac{2i\pi a}{2b}r^2} = \frac{1}{2}\varphi(-a, 2b).$$

On n'a alors, en supposant $b = 2^h b_1$, b_1 impair, qu'à appliquer les règles précédentes et, en outre, quand h est pair, la formule bien connue dans les éléments de la théorie des nombres

$$\left(\frac{2b_1}{a}\right) = \left(\frac{2}{a}\right)\left(\frac{b_1}{a}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(a^2-1)}\left(\frac{b_1}{a}\right),$$

pour trouver les résultats suivants, dont le lecteur constatera sans peine l'identité avec ceux que Ch. Hermite a donnés dans son Mémoire et qui seront rappelés dans sa Lettre.

Si h est impair, on a

$$S = \sqrt{b}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}\left(\frac{a}{b_1}\right) = \sqrt{b}\left(\frac{-a}{b_1}\right)e^{\frac{i\pi}{4}(2b_1-3)}, \text{ si } a \equiv 1 \pmod{4};$$

$$S = \sqrt{b}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}\left(\frac{-a}{b_1}\right), \text{ si } a \equiv -1 \pmod{4}.$$

Si h est pair, on a

$$S = \sqrt{b}\, e^{-\frac{i\pi}{4}+\frac{i\pi}{8}(a^2-1)}\left(\frac{a}{b_1}\right) = \sqrt{b}\, e^{-\frac{i\pi}{8}(a^2+4b_1-3)}\left(\frac{-a}{b_1}\right), \text{ si } a \equiv 1 \pmod{4};$$

$$S = \sqrt{b}\, e^{\frac{i\pi}{8}(a^2+1)}\left(\frac{-a}{b_1}\right), \text{ si } a \equiv -1 \pmod{4}.$$

Il reste enfin à évaluer la somme S quand b est impair. Ayant déterminé les entiers m et n tels que l'on ait $a = mb - 8n$, et remplaçant a par cette valeur dans l'expression de S, on trouve sans peine

$$S = e^{-\frac{m\pi i}{4}}\sum_{\rho=0}^{\rho=b-1} e^{\frac{8n\pi i}{b}\rho^2} = e^{-\frac{m\pi i}{4}}\varphi(4n, b) = e^{-\frac{m\pi i}{4}}\varphi(n, b),$$

puisque n est premier au nombre impair b. On n'a plus qu'à remplacer $\varphi(n, b)$ par sa valeur.

LETTRE DE CHARLES HERMITE.

St-Jean-de-Luz, villa Bel-Air, 24 septembre 1900.

Mon cher ami,

Je viens dégager ma parole et m'acquitter bien tardivement, il me faut l'avouer, de ma promesse de vous démontrer les formules concernant les quantités $\varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$ données dans mon ancien article *Sur l'équation du cinquième degré.*

Le bon air de la mer m'a aidé à surmonter la torpeur qui faisait obstacle à mon travail; j'en profite pour échapper aux remords de ma conscience, et, en pensant que vous avez sous les yeux cet article, j'aborde comme il suit la question.

Mon point de départ se trouve dans les formules de la page 2 et de la page 3, qui donnent les expressions de $\sqrt[4]{k}$ et de $\sqrt[4]{k'}$ comme fonctions uniformes de q, ou plutôt de τ, en posant $\tau = \frac{iK'}{K}$, et, parmi ces formules d'une extrême importance dont la découverte est due à Jabobi, j'envisagerai pour mon objet la suivante, à savoir:

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{1-2q+2q^4+\ldots}{1-2q^2+2q^8+\ldots} = \frac{\Sigma(-1)^n q^{n^2}}{\Sigma(-1)^n q^{2n^2}}, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

J'y introduirai tout d'abord la quantité τ, en me servant, au lieu des fonctions Θ, H, ..., de la série

$$\theta_{\alpha,\beta}(v) = \Sigma(-1)^{n\beta} e^{i\pi\left[\frac{\tau}{4}(2n+\alpha)^2+(2n+\alpha)v\right]} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

[*voir* mon article *Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques* (*Journ. de Liouville,* 1858)], et j'écrirai

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{\theta_{0,1}(0\,|\,\tau)}{\theta_{0,1}(0\,|\,2\tau)}.$$

J'ai posé, comme vous savez,

$$\sqrt[4]{k} = \varphi(\tau), \qquad \sqrt[4]{k'} = \psi(\tau);$$

on aura donc

$$\psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=\frac{\theta_{0,1}\left(0\,\middle|\,\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)}{\theta_{0,1}\left(0\,\middle|\,2\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)}.$$

Dans cette égalité, a, b, c, d désignent des entiers assujettis à la condition $ad-bc=1$; je fais la supposition qu'ils appartiennent au premier cas (p. 4) ([1]), où b et c sont pairs, a et d impairs, et je ferai

$$b=2b', \qquad 2c=c';$$

nous aurons ainsi

$$\psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=\frac{\theta_{0,1}\left(0\,\middle|\,\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)}{\theta_{0,1}\left(0\,\middle|\,\frac{c'+d.2\tau}{a+b'.2\tau}\right)},$$

et, comme nous conservons la condition $ad-b'c'=1$, la question se trouve ramenée à celle qui concerne la transformation de la fonction $\theta_{\alpha,\beta}(v)$. Dans l'article cité tout à l'heure, j'ai obtenu les résultats suivants, dont je vais faire usage.

Soit en général, pour des valeurs quelconques de a, b, c, d,

$$\alpha_1=a\alpha+b\beta+ab,$$
$$\beta_1=c\alpha+d\beta+cd,$$
$$\delta=e^{-\frac{i\pi}{4}(ac\alpha^2+2bc\alpha\beta+bd\beta^2+2abc\alpha+2abd\beta+ab^2c)};$$

puis, en supposant b positif,

$$S=\Sigma\, e^{-\frac{i\pi a}{b}\left(\rho-\frac{1}{2}b\right)^2} \quad (\rho=0, 1, 2, \ldots, b-1),$$
$$\mathfrak{T}=\frac{S\delta}{\sqrt{-ib(a+b\tau)}},$$

le signe de la racine carrée étant pris de manière que sa partie réelle soit positive. Nous avons l'égalité

$$\theta_{\alpha,\beta}[(a+b\tau)v\,|\,\tau]\,e^{i\pi b(a+b\tau)v^2}=\mathfrak{T}\,\theta_{\alpha_1,\beta_1}\left(v\,\middle|\,\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right),$$

et nous en concluons, pour $v=0$,

$$\theta_{\alpha,\beta}(0\,|\,\tau)=\mathfrak{T}\,\theta_{\alpha_1,\beta_1}\left(0\,\middle|\,\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right).$$

([1]) Cas 1° du Tableau XX_6.

La condition de b positif peut toujours s'obtenir en changeant, comme il est permis, le signe des quatre entiers a, b, c, d. Cela étant, la somme S s'exprime comme il suit, au moyen du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ de la théorie des résidus quadratiques.

Supposons (en premier lieu) que b soit pair. Je ferai $b = 2^h b_1$, b_1 étant impair, et l'on aura, suivant que l'exposant h est pair ou impair [1],

$$S = \sqrt{b}\left(\frac{-a}{b_1}\right) e^{\frac{i\pi}{8}[a^2+1+3(ab_1+1)^2+(b_1-1)^2]},$$

ou bien

$$S = \sqrt{b}\left(\frac{-a}{b_1}\right) e^{\frac{i\pi}{8}[3(ab_1+1)^2+(b_1-1)^2]}.$$

En second lieu, supposons b impair; alors on pourra déterminer deux nombres entiers m et n par l'équation

$$a = mb - 8n,$$

et l'on aura

$$S = \sqrt{b}\left(\frac{n}{b}\right) e^{\frac{i\pi}{8}[(b-1)^2-2m]}.$$

Je vais faire, en entrant dans tous les détails du calcul, l'application de ces formules aux quantités

$$\theta_{0,1}\left(0 \,\middle|\, \frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right), \qquad \theta_{0,1}\left(0 \,\middle|\, \frac{c'+d.2\tau}{a+b'.2\tau}\right).$$

Je supposerai qu'on ait

$$a \equiv 1, \quad b \equiv 0, \quad c \equiv 0, \quad d \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2).$$

Ce sera donc le premier des six cas qu'il faudra considérer; nous verrons bientôt que tous les autres s'en déduisent immédiatement.

Soient d'abord $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Des deux nombres

$$\alpha_1 = b + ab,$$
$$\beta_1 = d + cd,$$

le premier est pair, et même multiple de 4, le second est impair. Ayant donc en général

$$\theta_{2\alpha,2\beta+1}(v\,|\,\tau) = (-1)^\alpha \theta_{0\,1}(v\,|\,\tau),$$

---

[1] Le Mémoire du *Journal de Liouville* contient ici une faute d'impression les mots *pair* et *impair* ont été transposés.

nous en concluons l'égalité

$$\theta_{0,1}(0 \mid \tau) = \mathfrak{C}.\theta_{0,1}\left(0 \,\middle|\, \frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right).$$

J'ajoute qu'on peut mettre sous une forme plus simple la quantité

$$\delta = e^{-\frac{i\pi}{4}(bd+2abd+ab^2c)}$$

qui entre dans la valeur du facteur

$$\mathfrak{C} = \frac{S\,\delta}{\sqrt{-ib(a+b\tau)}}.$$

Des hypothèses faites sur les entiers a, b, c, d résulte, en effet, la congruence

$$bd+2abd+ab^2c \equiv -bd \qquad (\text{mod. } 8),$$

ce qui permet d'écrire

$$\delta = e^{\frac{i\pi}{4}bd}.$$

Si nous passons ensuite à la quantité $\theta_{0,1}\left(0 \,\middle|\, \frac{c'+d.2\tau}{a+b'.2\tau}\right)$, où $b'=\frac{b}{2}$ et $c'=2c$ remplacent b et c, a et d ne changeant pas, on a

$$\alpha'_1 = b'+ab',$$
$$\beta'_1 = d+c'd;$$

le premier de ces deux nombres est encore pair et le second impair, mais α'_1 n'est pas nécessairement divisible par 4, et, par conséquent, on a l'égalité

$$\theta_{0,1}(0 \mid 2\tau) = (-1)^{\frac{b'+ab'}{2}}\,\mathfrak{C}'.\theta_{0,1}\left(0 \,\middle|\, \frac{c'+d.2\tau}{a+b'.2\tau}\right),$$

où $\mathfrak{C}'$ représente ce que devient, dans ce second cas, le facteur $\mathfrak{C}$.

Désignons aussi par δ' et S' les nouvelles valeurs de δ et de S; on aura

$$\mathfrak{C}' = \frac{S'\delta'}{\sqrt{-ib'(a+b'.2\tau)}},$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{C}' = \frac{S'\delta'}{\sqrt{-\frac{1}{2}ib(a+b\tau)}},$$

et nous en concluons

$$\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{C}} = \sqrt{2}\,\frac{S'\delta'}{S\delta}.$$

Je m'arrêterai à cette formule, et je remarquerai en premier lieu que, en passant de S à S', le nombre b est remplacé par $\frac{b}{2}$. Il en résulte que, ayant posé $b = 2^h b_1$, l'exposant h varie de l'une à l'autre d'une unité. [Je supposerai d'abord $h > 1$.] Cela étant, la comparaison des valeurs de S et de S' nous donne l'égalité

$$S' = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{8}(a^2-1)} S,$$

d'où résulte

$$\frac{\mathfrak{T}'}{\mathfrak{T}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{8}(a^2-1)}\delta'}{\delta}.$$

Ceci posé, écrivons le facteur $(-1)^{\frac{b'+ab'}{2}}$ sous la forme $e^{\frac{i\pi}{4}(b+ab)}$, et employons l'expression de δ', à savoir

$$\delta' = e^{-\frac{i\pi}{4}(b'd+2ab'd+ab'^2c')} = e^{-\frac{i\pi}{8}(bd+2abd+ab^2c)};$$

on aura ainsi

$$(-1)^{\frac{b'+ab'}{2}} \frac{\mathfrak{T}'}{\mathfrak{T}} = e^{\frac{i\pi}{8}[a^2-1+2b(1+a)-3bd-2abd-ab^2c]}.$$

Or on vérifie facilement la congruence suivante

$$\text{(A)} \qquad 2b(1+a)-3bd-2abd-ab^2c \equiv -ab \pmod{16};$$

faisant, en effet, passer tous les termes dans un même membre et divisant par b, qui est pair, elle peut s'écrire

$$2(1-ad)+3(a-d)-abc \equiv 0 \pmod{8},$$

puis, d'après la condition $ad-bc=1$,

$$-2bc+3(a-d)-a(ad-1) \equiv 0 \pmod{8};$$

mais b et c étant pairs et a impair, on a

$$2bc \equiv 0, \qquad a^2 \equiv 1 \pmod{8};$$

elle deviendra donc simplement

$$4(a-d) \equiv 0 \pmod{8},$$

ce qui a lieu, en effet, a et d étant impairs. Nous avons, en conséquence,

$$(-1)^{\frac{b'+ab'}{2}} \frac{\mathfrak{T}'}{\mathfrak{T}} = e^{\frac{i\pi}{8}(a^2-ab-1)}.$$

Nous obtenons ensuite, au moyen de l'expression qui a été notre point de départ,

$$\psi(\tau) = \frac{\theta_{0,1}(0\,|\,\tau)}{\theta_{0,1}(0\,|\,2\tau)},$$

la relation fondamentale

$$\text{(I)} \qquad \psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = \psi(\tau)\, e^{\frac{i\pi}{8}(a^2-ab-1)}.$$

[Lorsque l'exposant h est égal à 1, b_1 est égal à b' et le calcul de S' n'est plus le même; cependant la même relation subsiste toujours; on a, en effet, comme lorsque h était plus grand que 1, l'égalité

$$\frac{\delta'}{\delta} = e^{\frac{\pi}{8}(bd+2abd+ab^2c)}$$

et, à cause de la congruence (A), qui peut se mettre sous la forme

$$bd + 2abd + ab^2c \equiv b(3a+2-2d) \pmod{16},$$

on peut encore écrire, en remplaçant b par $2b'$,

$$\frac{\delta'}{\delta} = e^{\frac{i\pi}{4}(3a+2-2d)b'};$$

mais ici, pour calculer S', on doit commencer par déterminer les entiers m et n, tels que l'on ait

$$a = mb' - 8n,$$

et l'on a alors

$$S' = \sqrt{b'}\left(\frac{n}{b'}\right) e^{\frac{i\pi}{8}[(b'-1)^2-2m]},$$

$$S = \sqrt{2b'}\left(\frac{-a}{b'}\right) e^{\frac{i\pi}{8}[2+3(ab'+1)^2+(b'-1)^2]}.$$

En tenant compte enfin des relations

$$\left(\frac{-a}{b'}\right) = \left(\frac{8n}{b'}\right) = \left(\frac{2n}{b'}\right) = \left(\frac{n}{b'}\right) e^{\frac{i\pi}{8}(b'^2-1)},$$

on en conclut

$$(-1)^{\frac{b'+ab'}{2}} \frac{\mathfrak{T}'}{\mathfrak{T}} = e^{\frac{M\pi i}{8}},$$

où

$$M = 2(3a+2-2d)b' - 2m - 2 - 3(ab'+1)^2 + b'^2 - 1 + 4b'(a+1);$$

en réduisant on trouve

$$M = 4(a - d + 2)b' - 2m - 6 - 3a^2b'^2 + b'^2;$$

à cause de la relation $ad - bc = 1$, où b et c sont pairs, on voit que les nombres impairs a et d sont congrus (mod. 4), en sorte que l'on a

$$4(a - d) \equiv 0 \pmod{16};$$

les congruences

$$8b' \equiv 8, \quad a^2 \equiv m^2b'^2, \quad m^2b'^4 \equiv m^2 \pmod{16}$$

sont évidentes, et il en résulte que l'on a

$$M = 2 - 2m - 3m^2 + b'^2;$$

or cette dernière expression est congrue (mod. 16) à

$$a^2 - 2ab' - 1 \equiv m^2b'^2 - 2mb'^2 - 1,$$

puisque la différence

$$(2 - 2m - 3m^2 + b'^2) - (m^2b'^2 - 2mb'^2 - 1)$$

est égale à

$$2m(b'^2 - 1) - (b'^2 + 3)(m^2 - 1)$$

et que m et b' sont impairs. La relation fondamentale (I) est donc établie quels que soient les nombres pairs b et c.]

On en tire les deux systèmes de formules concernant les fonctions $\varphi(\tau)$ et $\psi(\tau)$ pour tous les cas que présentent les entiers a, b, c, d, pris selon le module 2. Ces cas sont indiqués dans le Tableau suivant, que j'ai donné dans mon article *Sur l'Équation du cinquième degré* [1] :

---

[1] *Voir* la Note 1 de la page 63 du Tome II. Les cas II et V de Hermite correspondent aux cas que nous avons désignés par 5° et 2°.

	a	b	c	d
I.......	1	0	0	1
II......	0	1	1	0
III......	1	1	0	1
IV......	1	1	1	0
V.......	1	0	1	1
VI......	0	1	1	1

En premier lieu, je change, dans l'équation (I), τ en $-\frac{1}{\tau}$ et a, b, c, d en b, $-a$, d, $-c$; on trouve ainsi (¹)

$$\text{(II)} \qquad \psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = \varphi(\tau)\, e^{\frac{i\pi}{8}(b^2+ab-1)}.$$

Dans la même équation, je remplace ensuite τ par $\tau - 1$, a et c par $a+b$ et $c+d$; il vient

$$\text{(V)} \qquad \psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = \frac{1}{\psi(\tau)}\, e^{\frac{i\pi}{8}(a^2+ab-1)}.$$

Passant à l'équation (II), je change τ en $\tau+1$, a et c en $a-b$ et $c-d$, ce qui donne

$$\text{(IV)} \qquad \psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}\, e^{\frac{i\pi}{8}ab}.$$

Je continue en remplaçant, dans (V), τ par $-\frac{1}{\tau}$ et a, b, c, d par b, $-a$, d, $-c$, et j'obtiens

$$\text{(VI)} \qquad \psi\left(\frac{c-d\tau}{a+b\tau}\right) = \frac{1}{\varphi(\tau)}\, e^{\frac{i\pi}{8}(b^2-ab-1)}.$$

(¹) En tenant compte des formules (XLV).

Pour avoir le système complet des formules cherchées, il ne me reste plus qu'à changer dans cette équation τ en $\tau - 1$, a et c en $a+b$ et $c+d$; on a ainsi

$$\text{(III)} \qquad \psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = \frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)}\, e^{-\frac{i\pi}{8}ab},$$

en employant l'égalité

$$\varphi(\tau - 1) = e^{-\frac{i\pi}{8}} \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}.$$

Voici maintenant les résultats réunis et mis en regard des six cas énumérés dans le Tableau précédent [1] :

$$\text{I.} \qquad \psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = \psi(\tau)\, e^{\frac{i\pi}{8}(a^2-ab-1)},$$

$$\text{II.} \qquad \psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = \varphi(\tau)\, e^{\frac{i\pi}{8}(b^2+ab-1)},$$

$$\text{III.} \qquad \psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = \frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)}\, e^{-\frac{i\pi}{8}ab},$$

$$\text{IV.} \qquad \psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}\, e^{\frac{i\pi}{8}ab},$$

$$\text{V.} \qquad \psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = \frac{1}{\psi(\tau)}\, e^{\frac{i\pi}{8}(a^2+ab-1)},$$

$$\text{VI.} \qquad \psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = \frac{1}{\varphi(\tau)}\, e^{\frac{i\pi}{8}(b^2-ab-1)}.$$

J'ai à y joindre enfin les formules qui concernent la fonction $\varphi(\tau)$. Je remplacerai à cet effet a, b, c, d par $-c$, $-d$, a, b; on change ainsi

$$\psi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$$

en

$$\varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)$$

et aux divers cas

(I), (II), (III), (IV), (V), (VI)

se substituent ceux-ci

(II), (I), (VI), (V), (IV), (III).

---

(1) Ce sont les formules numérotées (XLVI_1).

Nous avons ainsi ce second système de relations

$$\text{I.}\qquad \varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=\varphi(\tau)\,e^{\frac{i\pi}{8}(d^2+cd-1)},$$

$$\text{II.}\qquad \varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=\psi(\tau)\,e^{\frac{i\pi}{8}(c^2-cd+1)},$$

$$\text{III.}\qquad \varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=\frac{1}{\varphi(\tau)}\,e^{\frac{i\pi}{8}(d^2-cd+1)}.$$

$$\text{IV.}\qquad \varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=\frac{1}{\psi(\tau)}\,e^{\frac{i\pi}{8}(c^2+cd-1)},$$

$$\text{V.}\qquad \varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=\frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}\,e^{\frac{i\pi}{8}cd},$$

$$\text{VI.}\qquad \varphi\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right)=\frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)}\,e^{-\frac{i\pi}{8}cd}.$$

J'observe enfin que les deux séries de formules établies, dans le cas où b est positif, subsistent dans tous les cas, comme on le voit en changeant a, b, c, d en $-a$, $-b$, $-c$, $-d$.

Avec une rectification pour les équations (III) et (IV), d'une inadvertance qui me sera échappée, ce sont bien les résultats que j'ai indiqués et dont je me reproche d'avoir tant tardé à vous donner la démonstration que vous m'avez demandée. Mais cette démonstration, je dois le reconnaître, *opere peracto*, ne me contente point : elle est longue, indirecte surtout; elle repose en entier sur le hasard d'une formule de Jacobi, oubliée et comme perdue parmi tant de découvertes dues à son génie. Je vous l'envoie, mon cher ami, *valeat quantum,* en vous informant que je serai revenu dans quelques jours, et à votre disposition pour tout ce que vous aurez à me demander. Et nous causerons aussi d'autre chose que d'Analyse, nous argumenterons, nous nous disputerons. De ma proximité de l'Espagne je rapporte des cigarettes d'Espagnoles; si vous ne veniez pas en fumer avec votre collaborateur d'aujourd'hui, votre professeur d'autrefois, c'est que vous avez le cœur d'un tigre.

Tuus et imo et toto corde.

Ch. HERMITE.

FIN DU TOME IV ET DERNIER.

26521 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

671